О ПЕНТАМИНО ИЗ КНИГ:

ПУТЕШЕСТВИЕ

ПО СТРАНЕ НАСТОЛЬНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР

РОССИЯ 2005 ИСТРА

И З   К Н И Г И


БИБЛИОТЕКА ЖУРНАЛА
НАУКА И ЖИЗНЬ
И. К. Лаговский
Благородных упражнений изустные преданья...
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

ГЛАВА 1.

МНОГОЛИКОЕ ПОЛИМИНО

Пентамино

Математики, вся профессиональная деятельность (а зачастую — и вся жизнь) которых так или иначе связана с решением различных задач, не раз «подбрасывали» широкой публике замысловатые игры и головоломки, становившиеся предметом всеобщего увлечения. К их числу относится и пентамино.

В 1953 году американский математик Соломон Голомб (в ту пору аспирант Гарвардского университета в Бостоне), как он пишет, «имел неосторожность выступить с докладом в математическом клубе и ввести в употребление термин "пентамино"», после чего на него обрушился «поистине неиссякаемый поток вопросов, задач, решений», так что ему пришлось беспрестанно заботиться о существовании, пополнении и развитии этой игры.

Однако выяснилось, что есть и советский изобретатель пентамино — ленинградский инженер-путеец Н. Д. Сергиевский, предложивший подобную игру еще в 1935 году под названием «12 по 5». В 1951 году эта игра была представлена на Всесоюзном конкурсе детской игрушки и хотя, как писал мне Н. Д. Сергиевский, «премии не удостоилась, однако получила одобрение жюри».

Одобрение-то игра получила, но выпущена «в свет», увы, не была, — к сожалению, это весьма знакомая ситуация. Не было публикаций о ней — остались одни лишь документы, подтверждающие участие в конкурсе. А жаль!

И вот сегодня эта трижды изобретенная игра стала увлечением для многих — и детей, и взрослых. Почему трижды, — спросите вы? Оказывается, существует версия и о еще более раннем появлении этой головоломки: пентамино явилось результатом

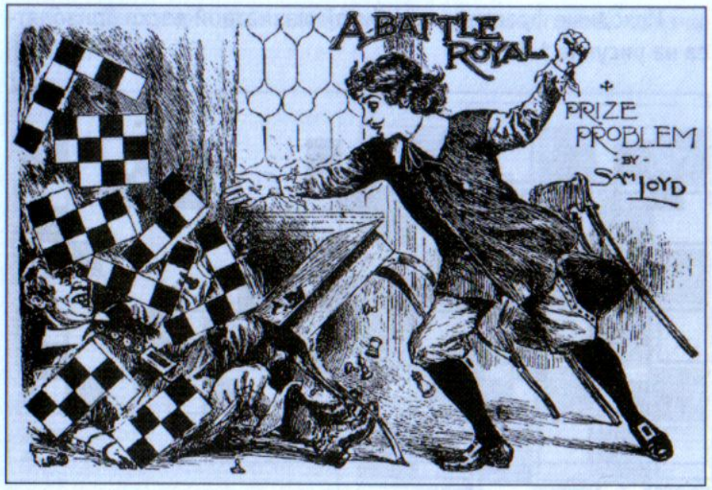


Рисунок из книги: Sam Loyd, Cyclopedia of Puzzles, 1914.

не слишком вежливых действий принца Генри — будущего короля Генриха I Младшего, сына Вильгельма Завоевателя — в отношении Людовика, дофина Франции, ставшего впоследствии королем Людовиком V Толстым. Разозлившийся принц Генри ударил Людовика шахматной доской по голове. Голова дофина осталась цела, а вот доска развалилась на 13 частей разной формы: 12 из них содержали по пять клеток и одна — четыре клетки. Факт драки незадачливых юных шахматистов, говорят, даже зафиксирован в хрониках. А вот что касается количества и формы осколков шахматной доски, — об этом поведал миру в 1907 году английский сочинитель головоломок Генри Э. Дьюдени в книге «Кентерберийские головоломки», предложив сложить из этих 13 частей «целую» шахматную доску.

Любопытно, что книга Дьюдени, переведенная на русский язык только в 1979 году, многим ее читателям показалась очень знакомой: почти все головоломки из нее прошли через массовые журналы начала XX века; многие игры, ставшие классическими, встречаются в книгах известных российских популяризаторов Е. И. Игнатьева, Я. И. Перельмана, Б. А. Кордемского и др., но ни в одной из них не попалось это «первичное пентамино». Видимо, не оценили за рубежом его потенциальные возможности и складывали из замечательных фигурок одну лишь шахматную доску.

А сможете ли это сделать вы?

Исходные фрагменты разбитой шахматной доски приводятся на рисунке 1.1.

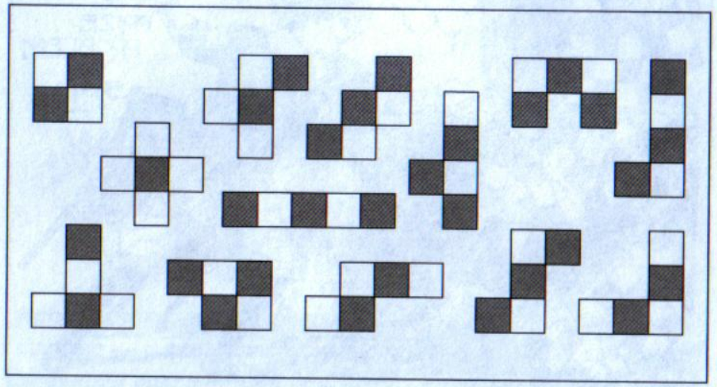


Рис. 1.1

Только не спешите заглядывать в приведенный ниже ответ, — сначала попробуйте найти решение сами. Можно, например, вырезать эти фигурки из клетчатой бумаги и закрасить клеточки.

Тем, кто привык всегда и во всем полагаться на компьютер, можно порекомендовать воспользоваться средствами рисования фигур, встроенными, например, в текстовый редактор Microsoft Word.

1. Воспользовавшись кнопкой □ на панели Рисование, нарисуйте два квадратика: с белым и с черным фоном.

2. Копируя их (например, перетаскивая их мышью при удерживании нажатой клавиши Ctrl, составьте фигуры по образцу рис. 1.1 и сгруппируйте каждую из этих фигур.

Теперь, перетаскивая полученные фигуры мышью и поворачивая их (кнопка **Рисование** *в панели Рисование → пункт меню Повернуть/отразить → команды Повернуть влево на 90° и Повернуть влево на 90°), можно попытаться решить головоломку.*

Г. Э. Дьюдени дает следующее решение этой задачи (рис. 1.2).

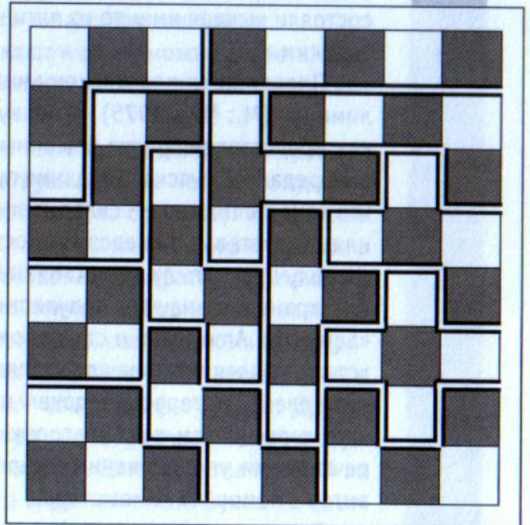


Рис. 1.2
Решение
Дьюдени

Спрашивается: возможно ли иное решение, с другим расположением тех же частей? Да, возможно, — утверждает читатель «Науки и жизни» Владимир Красноухов и предлагает еще три варианта решения этой задачи (рис. 1.3).

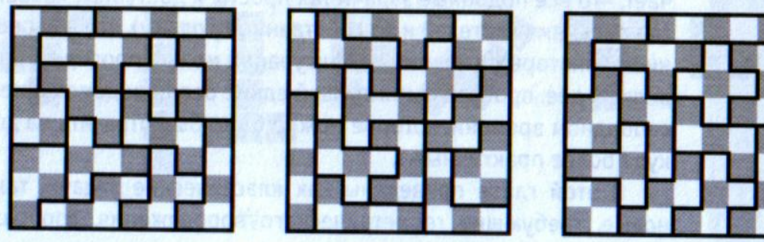


Рис. 1.3

Однако вернемся к нашему пентамино. Очевидно, эта головоломка гораздо шире, чем простое складывание клетчатого квадрата, — тем более, что вовсе не обязательно, чтобы фигуры состояли каждая именно из пяти клеток и даже чтобы они были плоскими!

Представляя российскому читателю книгу С. Голомба «Полимино» (М.: Мир, 1975) — первую монографию, посвященную как представлению уже решенных задач, так и постановке новых, редактор русского издания профессор И. М. Яглом отмечал, что тема полимино — складывания фигур из набора полимино или доказательства невозможности их построения — одно время получила чуть ли не постоянную прописку в двух самых распространенных научно-популярных журналах — американском «Scientific American» и советском «Наука и жизнь» (в котором, кстати, коллекция задач пополнялась в основном за счет писем читателей). Интерес к задачам пентамино И. М. Яглом связывает с расцветом комбинаторики и проблемами оптимизации, решаемыми упорядоченным перебором большого числа вариантов с помощью компьютера.

То же самое, впрочем, можно сказать и о других задачах — головоломных карточных и домино-пасьянсах, задачах на построение фигур из кубиков «сома», пентакубиков, на построение магических числовых квадратов и кубов, «квадрирование квадратов», перекраивание фигур и т.п.

Сегодня задачи с пентамино уже вошли даже в учебники математики для школьников младших классов. Но это не означает, что все подобные задачи так просты и доступны: известно (по письмам читателей и по собственному опыту), что над решением некоторых изящных конфигураций можно просидеть и неделю, и две, пропуская мимо ушей едкие реплики домочадцев о свободном времени, которое можно было бы потратить на дела куда более практичные...

В этой главе приведены как классические задачи, так и новые, требующие геометрического воображения, сообразительности и логических рассуждений, тренирующие терпение и настойчивость в достижении цели. Мы, конечно, не предполагаем, что тетради в клеточку — необходимый атрибут при чтении этой главы — будут немедленно раскуплены во всех окрестных магазинах канцтоваров, но надеемся, что многие из вас заполнят решениями и самостоятельно придуманными красивыми задачами далеко не одну тонкую школьную, а может быть, и общую тетрадь. Причем вполне возможно, что вы будете сидеть над какой-нибудь фигурой целую неделю, а соседский мальчик, которому вы, наконец, решите похвастаться своим решением, сложит эту фигуру за несколько минут. Или наоборот.

Задачи пентамино привлекают и даже, можно сказать, привораживают. Они одинаково интересны и доступны и академику, и школьнику.

Головоломка «Пентамино» есть в продаже (по крайней мере в московских магазинах игрушек), но ее несложно сделать и самому из картона или пластика (см. стр. 218). Пентамино (рис. 1.4) состоит из 12 элементов различной конфигурации, в каждом из которых по 5 элементарных квадратиков (отсюда и название: «пента» — пять). Это полный набор из всех возможных фигур. Никаких других элементов, состоящих из 5 квадратиков, составить нельзя. Из этих 12 элементов 6 симметричны и при переворачивании не меняют своей конфигурации. Другие 6 элементов асимметричны и при переворачивании превращаются в свои «зеркальные отражения». Для удобства каждой из 12 фигур присвоено название в виде латинской буквы — соответственно форме фигуры (см. рис. 1.4). При решении задач элементы пентамино можно укладывать как одной, так и другой стороной.

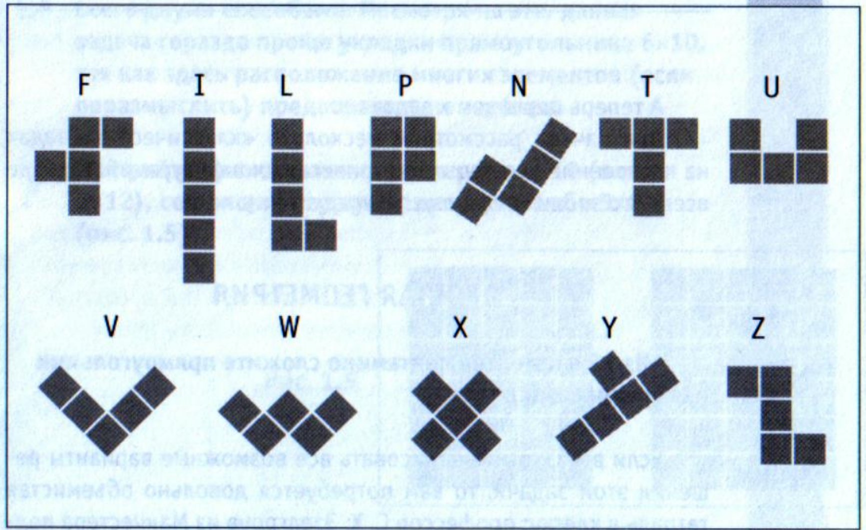


Рис. 1.4

Чтобы реализовать головоломку «Пентамино» на компьютере, можно воспользоваться текстовым редактором Microsoft Word либо редактором презентаций Microsoft PowerPoint, а если вы предпочитаете свободное ПО, — текстовым редактором OpenOffice.org Writer или редактором презентаций OpenOffice.org Impress.

Воспользовавшись кнопкой □ на панели Рисование, нарисуйте квадратик (чтобы получить правильную геометрическую фигуру, нужно во время ее рисования удерживать нажатой клавишу Shift). Выберите для него серый цвет линии границы и черный цвет фона.

Копируя исходный квадратик (перетаскиванием мышью при нажатой клавише Ctrl), составьте из его копий фигуры полимино по образцу рис. 1.4, и сгруппируйте каждую фигуру.

Теперь вы можете решать задачи, перетаскивая получившиеся фигуры мышью, поворачивая их (кнопка **Рисование** *в панели Рисование → пункт меню Повернуть/отразить → команды Повернуть влево на 90° и Повернуть влево на 90°), а также выполняя их зеркальное отражение, что аналогично укладыванию фигур другой стороной (кнопка* **Рисование** *в панели Рисование → пункт меню Повернуть/отразить → команды Отразить слева направо и Отразить сверху вниз).*

А теперь перейдем к задачам.

Для начала рассмотрим несколько «классических» задач на построение простых геометрических конфигураций. Прежде всего это *задачи о прямоугольниках.*

ПРОСТАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1 **Из 12 элементов пентамино сложите прямоугольник размерами 6×10.**

Если вы захотите нарисовать все возможные варианты решения этой задачи, то вам потребуется довольно объемистая тетрадь в клетку: профессор С. Х. Эзелгроув из Манчестера подсчитал с помощью компьютера, что данная задачи имеет 2339

различных решений. Ничем себя не ограничивая, попробуйте найти хотя бы одно из них*.

Конечно, интереснее решать эту задачу, если имеются те или иные ограничения (см. ниже). Некоторые читатели, впрочем, склонны считать эти дополнительные условия не ограничениями, а подсказкой. Так ли это — определите сами.

2 **Постройте прямоугольник размерами 6×10 так, чтобы каждый из составляющих его элементов хотя бы одной стороной выходил на границу этого прямоугольника.**

3 **Постройте прямоугольник размерами 6×10 так, чтобы только элемент I (полоса 1×5) не выходил на границу прямоугольника.**

4 **Из 12 элементов пентамино сложите прямоугольник размерами 5×12.**

5 **Из тех же элементов сложите прямоугольник размерами 4×15.**

6 **Прямоугольник размерами 3×20 можно построить всего двумя способами. Несмотря на это, данная задача гораздо проще укладки прямоугольника 6×10, так как здесь расположение многих элементов (если поразмыслить) предопределено заранее.**

7 **Постройте прямоугольник размерами 6×10 (или 5×12), состоящий из двух прямоугольников 5×6 (рис. 1.5).**

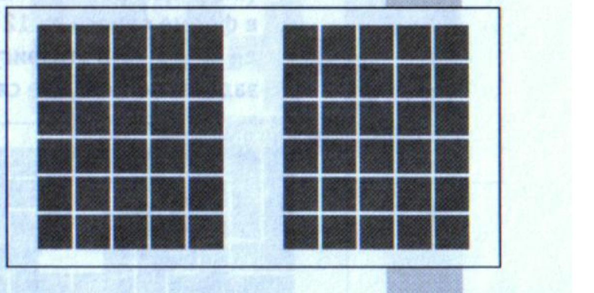


Рис. 1.5

* Ответы и решения задач приведены в конце книги.

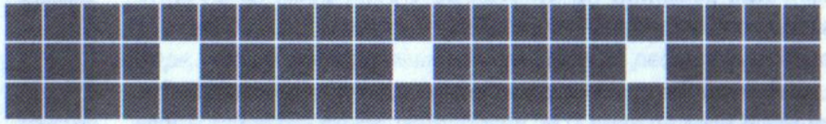


Рис. 1.6

8 **Постройте прямоугольник размерами 21×3 с тремя симметрично расположенными отверстиями (рис. 1.6).**

9 **Из 11 элементов пентамино можно сложить прямоугольник размерами 5×11. Двенадцатый элемент при этом останется «за бортом» (в нашем примере на рис. 1.7 это фигура Z). Попробуйте сложить несколько таких прямоугольников, оставляя каждый раз неиспользованными разные элементы.**

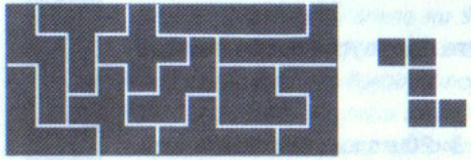


Рис. 1.7

Интересно, что в процессе подготовки задач этой серии нам больше всего пришлось повозиться с элементом P — самым компактным из всей дюжины.

10 **Из 12 элементов пентамино сложите прямоугольник размерами 5×13 так, чтобы внутри прямоугольника (в его центральной части) образовалось отверстие в форме одного из 12 элементов (в нашем примере на рис. 1.8 это фигура Z). Как и в предыдущей задаче, попробуйте сложить несколько таких**

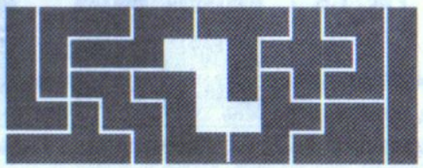


Рис. 1.8

прямоугольников с отверстиями в форме разных элементов.

11 **Уложите 12 элементов пентамино на поле прямоугольника размерами 7×9.**

При этом не обязательно, чтобы элементы пентамино занимали всю площадь прямоугольника, — в нем могут быть отверстия различных форм и размеров (одно или более), а также может отсутствовать по одной клеточке по углам.

12 **Уложите 12 элементов пентамино на поле прямоугольника размерами 10×7.**

Как и в предыдущей задаче, элементы пентамино не обязательно должны занимать всю площадь прямоугольника.

13 **Постройте из 12 элементов пентамино фигуры с единичными симметрично расположенными отверстиями на поле прямоугольников размерами 6×11, 5×14 и 5×13.**

14 **Изящную фигуру с 13-ю окнами 1×1 (или, если хотите, прямоугольник 11×7 с 17 окнами 1×1, — рис. 1.9) требуется сложить двумя способами.**

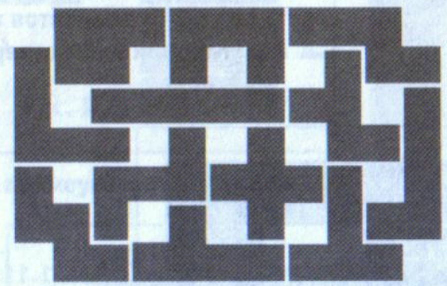


Рис. 1.9

15 **Удастся ли вам найти решение предыдущей задачи с другим расположением 17-ти несоприкасающихся симметрично расставленных окон 1×1?**

16 **Каждую из фигур 1—7, показанных на рис. 1.10, постройте из 12 элементов пентамино.**

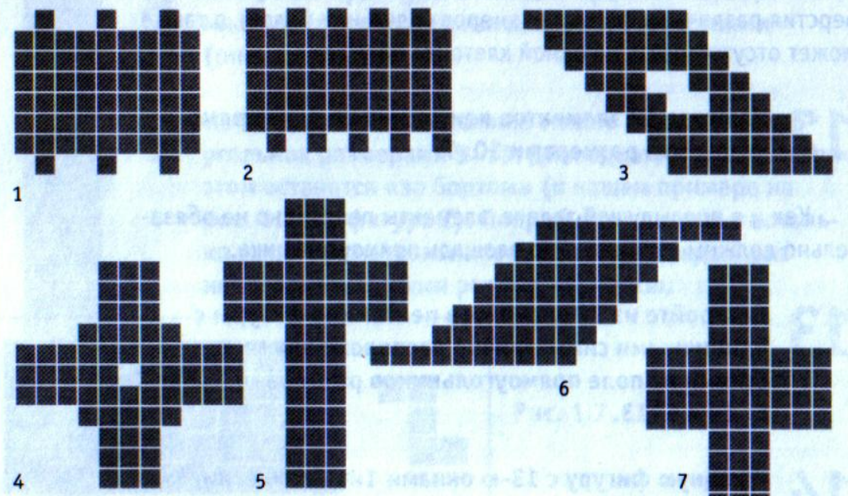


Рис. 1.10

17 **Из 12-ти элементов пентамино сложите прямоугольник 9×8 с отверстием 3×4 в центре (рис. 1.11).**

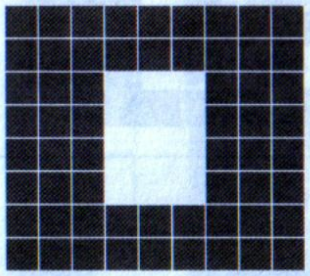


Рис. 1.11

Еще в четырех заданиях предлагается сложить фигуры из 12 элементов пентамино.

18 **Квадрат 5×5 и прямоугольник 5×7 (рис. 1.12).**

19 **Прямоугольники 3×5 и 9×5 (рис. 1.13).**

20 **Прямоугольники 4×5 и 4×10 (рис. 1.14).**

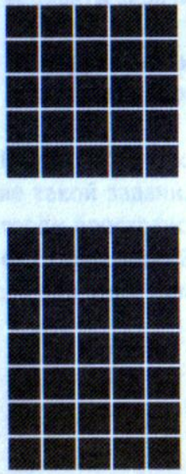


Рис. 1.12

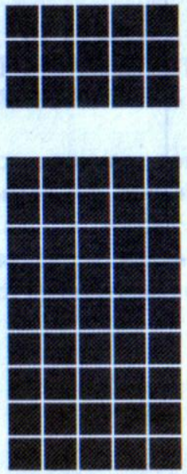


Рис. 1.13

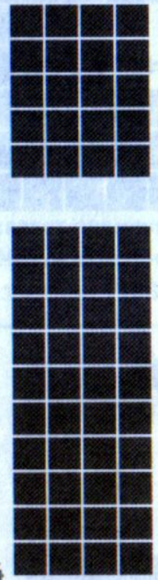


Рис. 1.14

21 **Зубчатый квадрат 4×4 и прямоугольник 5×7 (рис. 1.15).**

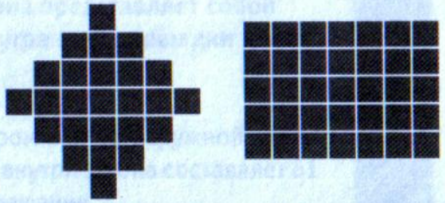


Рис. 1.15

22 **Квадрат 8×8 с отверстием 2×2 в центре (рис. 1.16) можно построить 65-ю различными способами. Сможете ли вы найти хотя бы пять из них? (Зеркальные отражения и повороты всей сложенной фигуры на 90°, 180° и 270° не считаются различными способами построения.)**

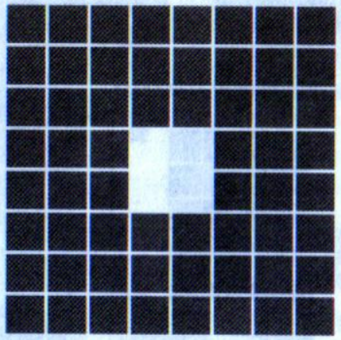


Рис. 1.16

ПЕНТАМИНО-ФЕРМЫ

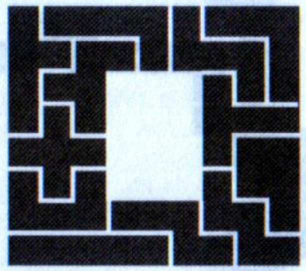
Элементы пентамино можно располагать не только компактно, но и так, чтобы внутри фигуры оставались незаполненные площадки. Такую замкнутую фигуру из пентамино, ограничивающую какое-то незаполненное пространство, мы будем называть «забором», или «оградой», а всю конструкцию в целом назовем «фермой», или «загоном».

Задачу о «фермах пентамино» впервые сформулировал В. Фезер из университета в Сан-Луи (США). В ней спрашивается, какую максимальную площадь можно огородить, используя все 12 элементов пентамино. При этом рассматриваются следующие варианты задачи.

1 **И наружный, и внутренний контуры фигуры представляют собой прямоугольники.**

На рис. 1.17 в качестве примера показано возможное решение такой задачи. Попробуйте сами найти другое решение, в котором пространство внутри забора составляет прямоугольник 4×7 (площадью 28 квадратных единиц). Наружные контуры забора при этом образуют прямоугольник размерами 11×8.

Рис. 1.17



2 **Контур наружной стены загона представляет собой прямоугольник, а контур внутренней площадки имеет неправильную форму.**

Существует решение, при котором контур наружной стены образует квадрат 11×11, а площадь внутри загона составляет 61 квадратную единицу. Найдите это решение.

3 **Внутренняя площадка фермы — прямоугольник, а наружная сторона ограды имеет неправильную форму.**

Максимально достижимая при этом площадь внутренней площадки составляет прямоугольник 9×10 (рис. 1.18). Однако можно сложить элементы пентамино и по-другому с тем же результатом. Найдите это решение.

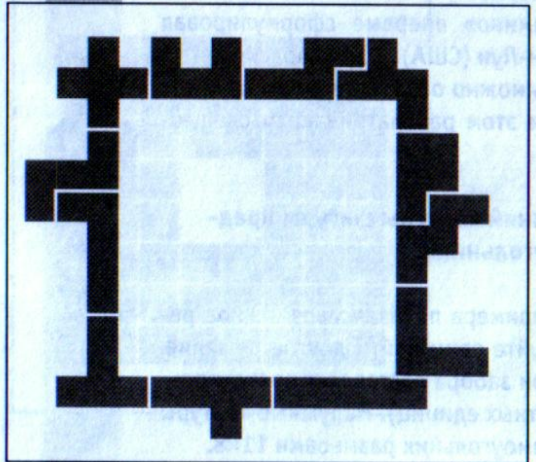


Рис. 1.18

Рис. 1.19

4 **Конфигурация и наружной линии забора, и внутреннего дворика произвольна.**

На рис. 1.19 в качестве примера приведено решение, в котором площадь внутреннего дворика составляет 126 квадратных единиц. Однако есть решение, которое позволяет составить ферму с площадью дворика, равной 127 квадратным единицам. Попробуйте найти его. Известно, впрочем, что эта площадь может быть и больше. Удастся ли вам поставить рекорд?

5 **Подумайте: насколько можно увеличить максимальную площадь внутреннего дворика, если считать допустимым касание элементов пентамино друг с другом только в одной точке (углом), как показано на рис. 1.20?**

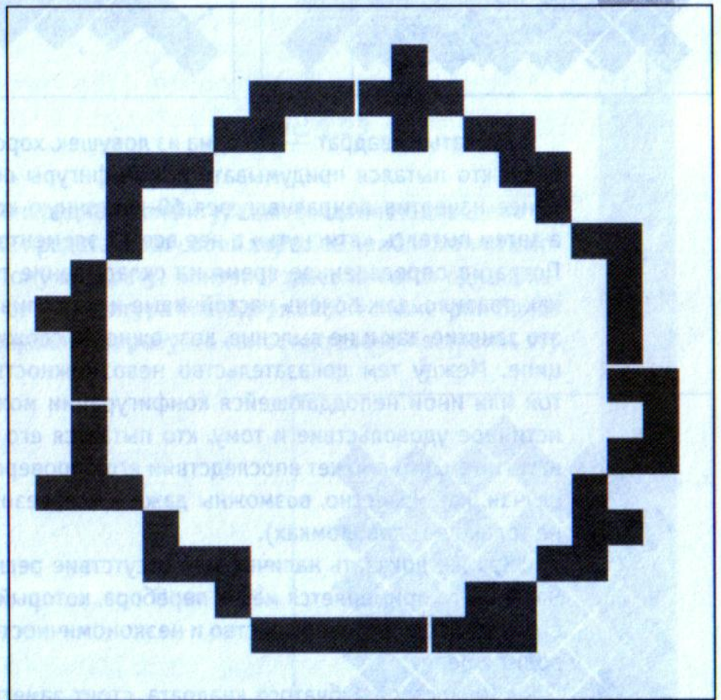


Рис. 1.20

ПЕНТАМИНО-АРКИ

1 **Доказано, что конфигурацию в виде зубчатого квадрата размерами 6×6 с отверстием в центре (рис. 1.21) невозможно сложить из 12 элементов пентамино, хотя в этой фигуре и содержится ровно 60 клеточек — как раз столько, сколько их в 12 элементах пентамино.**

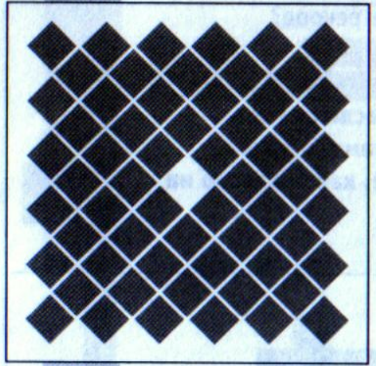


Рис. 1.21

Зубчатый квадрат — это одна из ловушек, хорошо знакомых всем, кто пытался придумывать новые фигуры пентамино, заранее начертив понравившуюся 60-клеточную конфигурацию, а затем пытаясь «втиснуть» в нее все 12 элементов пентамино. Потратив определенное время на складывание такой фигуры, как правило, даже очень настойчивые и терпеливые оставляют это занятие, так и не выяснив, возможно ли сложить ее в принципе. Между тем доказательство невозможности построения той или иной неподдающейся конфигурации может доставить истинное удовольствие и тому, кто пытается его сформулировать, и тем, кто сможет впоследствии его опровергнуть (а такие случаи, как известно, возможны даже в «серьезных» науках, а не только в головоломках).

Как же доказать наличие или отсутствие решения задачи? Чаще всего применяется метод перебора, который, несмотря на его кажущееся несовершенство и неэкономичность, все же приводит к цели.

«Коварство» зубчатого квадрата, стоит заметить, было обнаружено не сразу. Многие любители пентамино пытались построить его, и время от времени появлялись конфигурации, в той или иной степени приближавшиеся к заданной. Вот, например,

конфигурация, которая считается наилучшим приближением к искомой (рис. 1.22). Отверстие в центре здесь расположено на требуемом месте, но внешние контуры фигуры искажены.

Еще в одной конфигурации (рис. 1.23) «дырка» как бы вытеснена из середины наружу и контуры зубчатого квадрата тоже искажены.

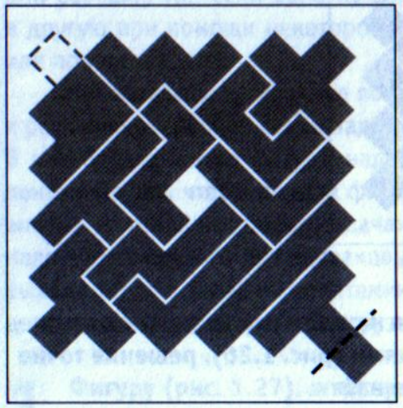


Рис. 1.22

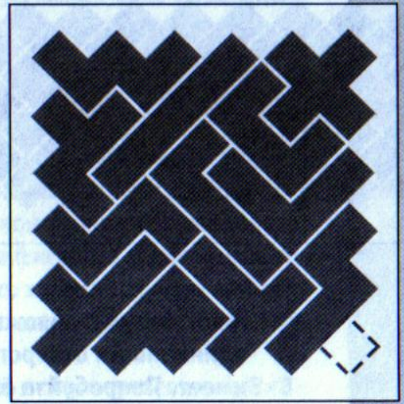


Рис. 1.23

Наконец, очередная конфигурация (задание приведено на рис. 1.24) тоже представляет собой хорошее приближение к искомому зубчатому квадрату. Конечно, здесь имеется одна лишняя дырка, но данная фигура благодаря своей симметрии более изящна, чем первая. Попробуйте самостоятельно построить эту фигуру.

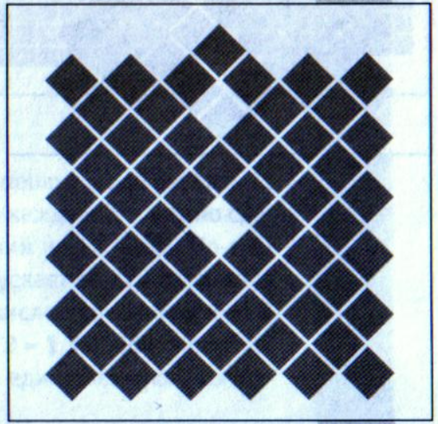


Рис. 1.24

2 **Зубчатый прямоугольник, содержащий ровно 60 клеточек (рис. 1.25), как и зубчатый квадрат с отверстием в центре, также еще никому не удалось построить. Попробуйте исследовать эту фигуру и понять, решается ли такая задача.**

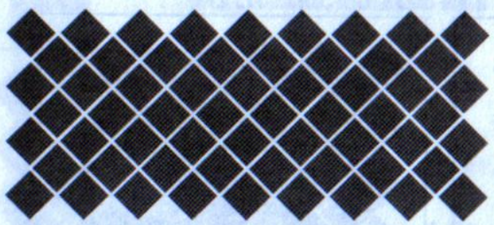


Рис. 1.25

3 **А вот фигура, похожая на зубчатый квадрат с пятью единичными отверстиями (рис. 1.26), решение точно имеет. Попробуйте его найти.**

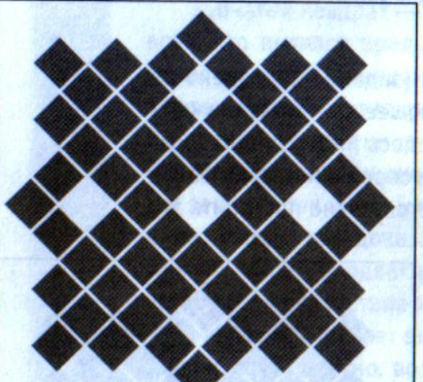


Рис. 1.26

КОНГРУЭНТНЫЕ РАЗБИЕНИЯ

В геометрии существует понятие конгруэнтности (лат. *congruens* — соразмерный, соответствующий, совпадающий). Говорят, что две фигуры или две части одной фигуры конгруэнтны, если их можно совместить, наложив одну на другую, так, чтобы они совпали, т.е. если одна из фигур может быть переведена в другую при помощи некоторого движения (прямолинейного или поворота).

Это небольшое вступление понадобится нам, чтобы перейти к решению очередной серии задач на конгруэнтные разбиения. В них предлагаемые фигуры надо построить из 12 элементов пентамино так, чтобы каждая фигура состояла из двух конгруэнтных частей. В некоторых задачах конгруэнтность уже задана: надо просто сложить две одинаковые фигуры, в каждую из которых входит по 6 элементов пентамино; в других случаях вам придется разбивать фигуру на конгруэнтные части самостоятельно.

1 **Фигуру (рис. 1.27), в которой используется поле 8×8 с четырьмя отверстиями 1×1, требуется разбить на две конгруэнтные части так, чтобы простым сдвигом этих частей получить прямоугольник 7×9 с тремя отверстиями 1×1.**

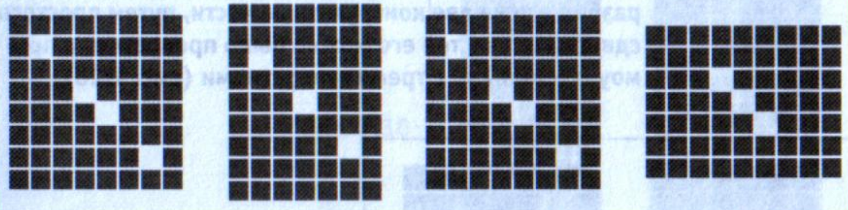


Рис. 1.27

Эта задача достаточно трудная. Во-первых, надо разбить 12 элементов на 2 группы по 6 элементов в каждой. Это можно сделать 924-мя способами (число сочетаний из 12 по 6). Во-вторых, каждый из этих 924 способов допускает по 720 вариантов взаимного расположения элементов (число перестановок из 6 элементов). Итого получаем 665 280 × 2 = 1 330 560 способов. Как же найти среди них ту (возможно, единственную!) комбинацию, которая приводит к цели?

Случайно набрести на правильное решение маловероятно — это менее одного шанса из миллиона. Однако логические размышления показывают, что все трудности преодолимы, поскольку формальный математический подход дает весьма преувеличенное количество возможных комбинаций, подлежащих исследованию. Во-первых, верхний угол левой половины фигуры (и соответственно нижний угол правой ее половины) могут занимать только 5 элементов пентамино из 12 (L, Y, N, V или I), а нижний правый угол — только 6 элементов (L, Y, N, P, W или I). Во-вторых, в одной и той же половине фигуры не могут находиться вместе пять элементов: L, Y, N, V, I либо L, Y, N, W, I, — по крайней мере хотя бы один из них должен быть уложен в угол другой половины. В-третьих, уложив в верхний угол, скажем, элемент L, мы увидим, что рядом с ним могут расположиться только два элемента — Z или U, а элемент N по аналогичной причине требует соседства с элементом T или Y. Это тоже ограничивает количество возможных вариаций с перемещениями...

В итоге подобные логические рассуждения сужают круг наших исследований, пожалуй, более чем в 10 тысяч раз. Попробуйте решить задачу, воспользовавшись нашей подсказкой: к решению приводит комбинация из элементов L, F, Z, X, P, V в одной половине фигуры и Y, N, W, U, T, I в другой.

2 **Требуется сложить прямоугольник 6×10 так, чтобы, разбив его на две конгруэнтные части, путем простого сдвига этих частей его можно было превратить в прямоугольник 7×9 с тремя отверстиями (рис. 1.28).**

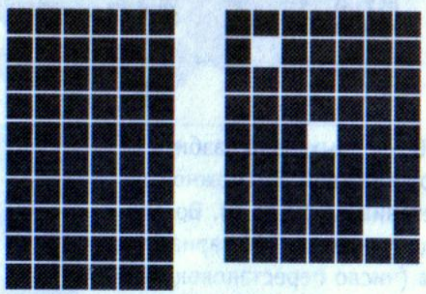


Рис. 1.28

3 **Прямоугольник размерами 6×10 требуется разбить на две конгруэнтные части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник 7×9 с отверстием 1×3 в центре (рис. 1.29).**

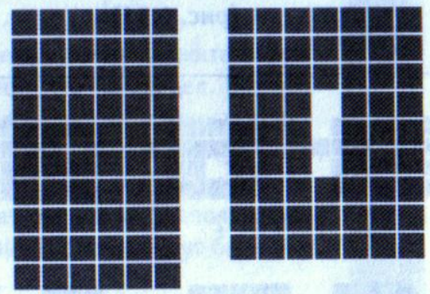


Рис. 1.29

4 **Прямоугольник размерами 5×12 требуется разбить на две конгруэнтные части так, чтобы из них можно было сложить прямоугольник 5×10 (рис. 1.30).**

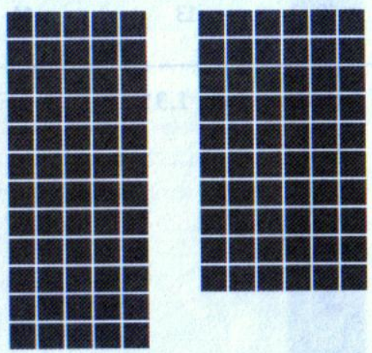


Рис. 1.30

Еще более трудными являются задачи, в которых требуется сложить три конгруэнтные фигуры.

5 **Требуется разбить 12 элементов пентамино на 3 группы по 4 элемента в каждой так, чтобы из них можно было сложить одновременно три одинаковые фигуры (рис. 1.31).**

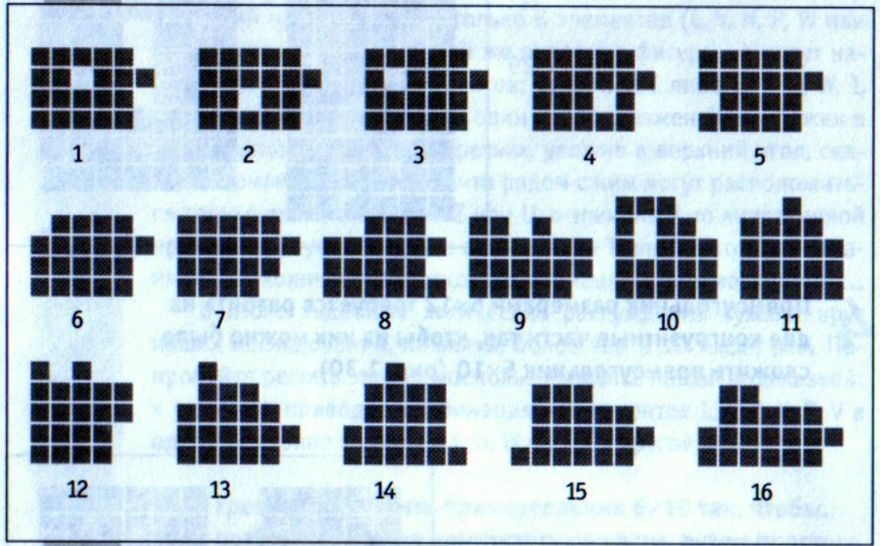


Рис. 1.31

БАШНЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫСОТЫ

Если считать размер одной клеточки пентамино равным 10 метрам, то симметричная башня, показанная на рис. 1.32, будет иметь высоту 290 метров. Ее можно построить из 12 элементов пентамино.

Попробуйте построить эту башню, а затем сложите новую башню уже высотой 310 метров. Но и это не предел. Высшее достижение на момент написания данной книги принадлежит Елене Жуковой из подмосковного города Истра: ей удалось построить башню высотой 320 м. Удастся ли вам повторить или превзойти этот рекорд? (Количество окон и их расположение по высоте башни заранее не оговариваются и могут быть выбраны произвольно.)

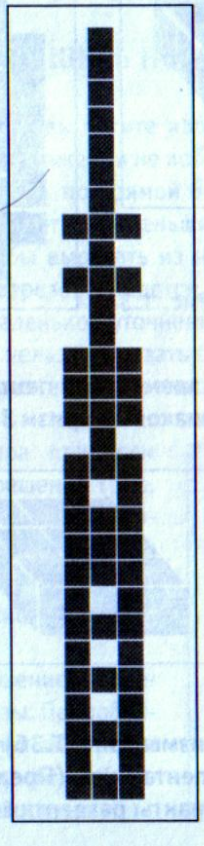


Рис. 1.32

ОКЛЕЙКА

Представим себе, что элементы пентамино сделаны гибкими (например, вырезаны из пленочных самоклеящихся обоев). Тогда этими элементами можно оклеивать объемные фигуры. Но вначале потребуется найти рациональную развертку поверхности этой фигуры, а затем уже покрывать ее элементами пентамино.

Для примера приведем одну такую задачу с решением.

1 **Коробку 6×6×1 (рис. 1.33) требуется оклеить 12-ю элементами пентамино. Одно из возможных решений этой задачи показано на рис. 1.34. Попробуйте найти другие варианты.**

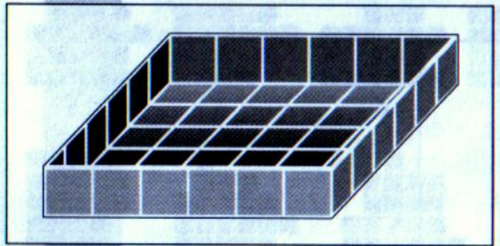


Рис. 1.33

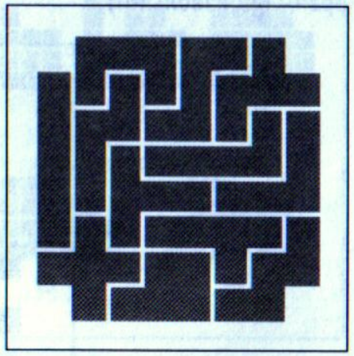


Рис. 1.34

2 **Требуется 12-ю элементами пентамино оклеить поверхность двух одинаковых призм 3×3×1 (рис. 1.35).**

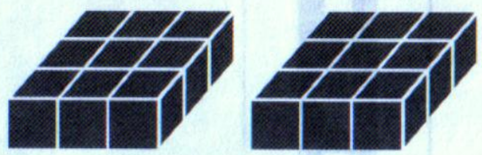


Рис. 1.35

3 **Поверхность призмы (рис. 1.36) требуется оклеить 12 элементами пентамино. (Предварительно найдите возможные варианты развертки этой призмы.)**

4 **Поверхность еще одной призмы (рис. 1.37) оклеить 12-ю элементами пентамино. (Предварительно также найдите возможные варианты развертки этой призмы.)**

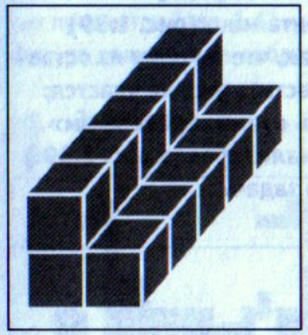


Рис. 1.36

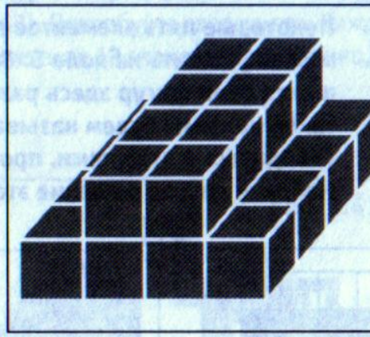


Рис. 1.37

ВООРУЖИВШИСЬ НОЖОВКОЙ

Представьте себе, что вы хотите изготовить пентамино из фанеры, но в вашем распоряжении не лобзик, а только ножовка, которая может резать лишь по прямой без поворотов. Какими в этом случае должны быть наименьшие размеры фанерного прямоугольника, чтобы вырезать из него все 12 элементов пентамино? Сколько разрезов придется сделать, чтобы вырезать все заготовки? (Маленькое уточнение: поскольку элемент U («швеллер») вообще нельзя вырезать без поворота пилы, мы будем считать, что вырезается заготовка для него — прямоугольник 2×3.)

В качестве примера приведем упрощенный вариант решения (рис. 1.38), при котором используется прямоугольный лист фанеры размерами 7×14. Стрелками на рисунке показано, какие распилы нужно выполнить первыми.

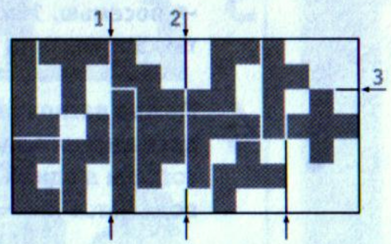


Рис. 1.38

Продолжите это решение и определите остальные разрезы. Попробуйте найти более оптимальный вариант раскроя фигур, для которого требуется лист фанеры меньшей площади.

ЗАГАДКИ «ЗАМИНИРОВАННОГО» ПОЛЯ

1 **Некоторые пять элементов пентамино (рис. 1.39) можно уложить на поле 8×8 так, что ни одну из оставшихся семи фигур здесь разместить уже не удастся; такое поле мы будем называть «заминированным». (Убедитесь в этом сами, проанализировав рис. 1.39.) Найдите другое решение этой задачи.**

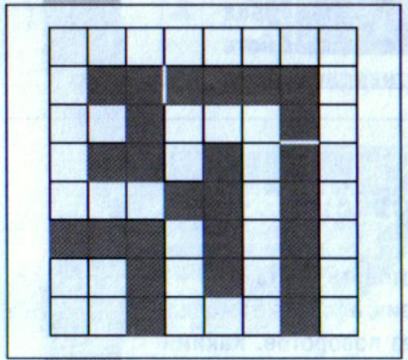


Рис. 1.39

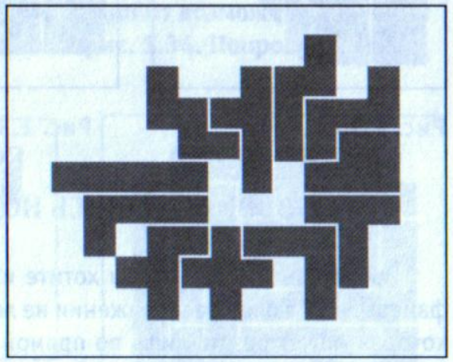


Рис. 1.40

2 **«Заминируйте» поле 9×9 шестью элементами пентамино.**

3 **Поле 10×10 можно «заминировать» семью, 11×11 — восемью, 12×12 — десятью, а 13×13 — одиннадцатью элементами пентамино. Как это сделать?**

4 **Можно расположить 11 элементов пентамино вокруг двенадцатого элемента так, чтобы они касались его хотя бы в одной точке (рис. 1.40). Все ли элементы поддаются такому «окружению»?**

5 **Можно ли расположить 11 элементов вокруг двенадцатого так, чтобы каждый из них соприкасался хотя бы одной стороной?**

КОНКРЕТНЫЕ ФИГУРЫ

Набор пентамино позволяет составлять различные конфигурации сложной формы — фигурки зверей, силуэты машин и других предметов (рис. 1.41—1.43). Попробуйте сделать это. Каждая фигура должна быть собрана из всех 12 элементов пентамино.

1 **Зоопарк**

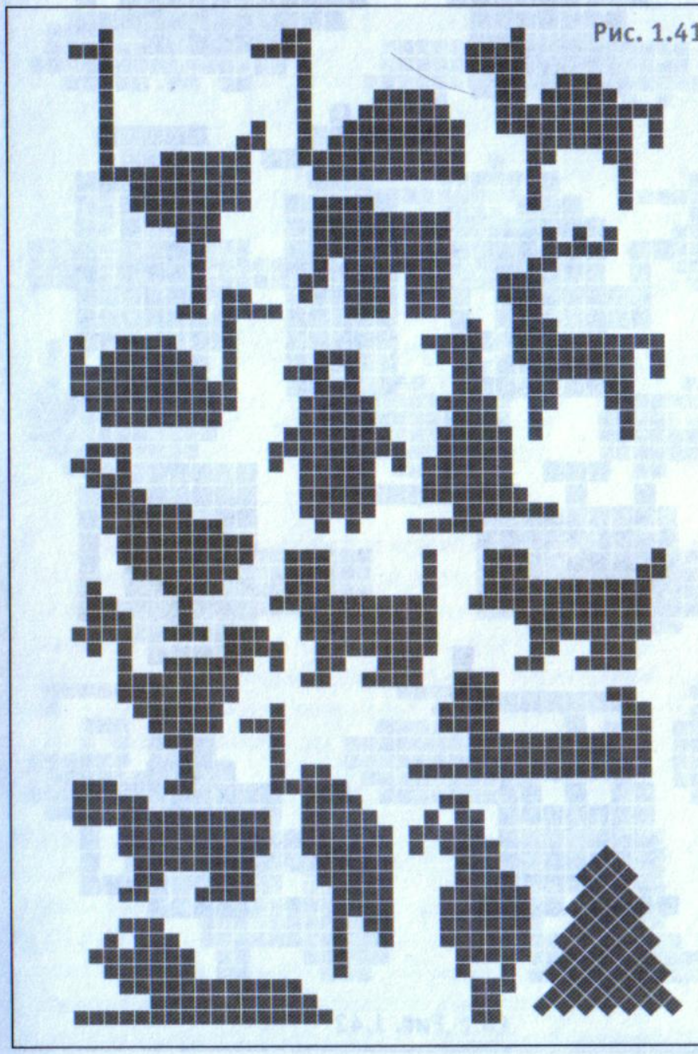


Рис. 1.41

2 Посуда

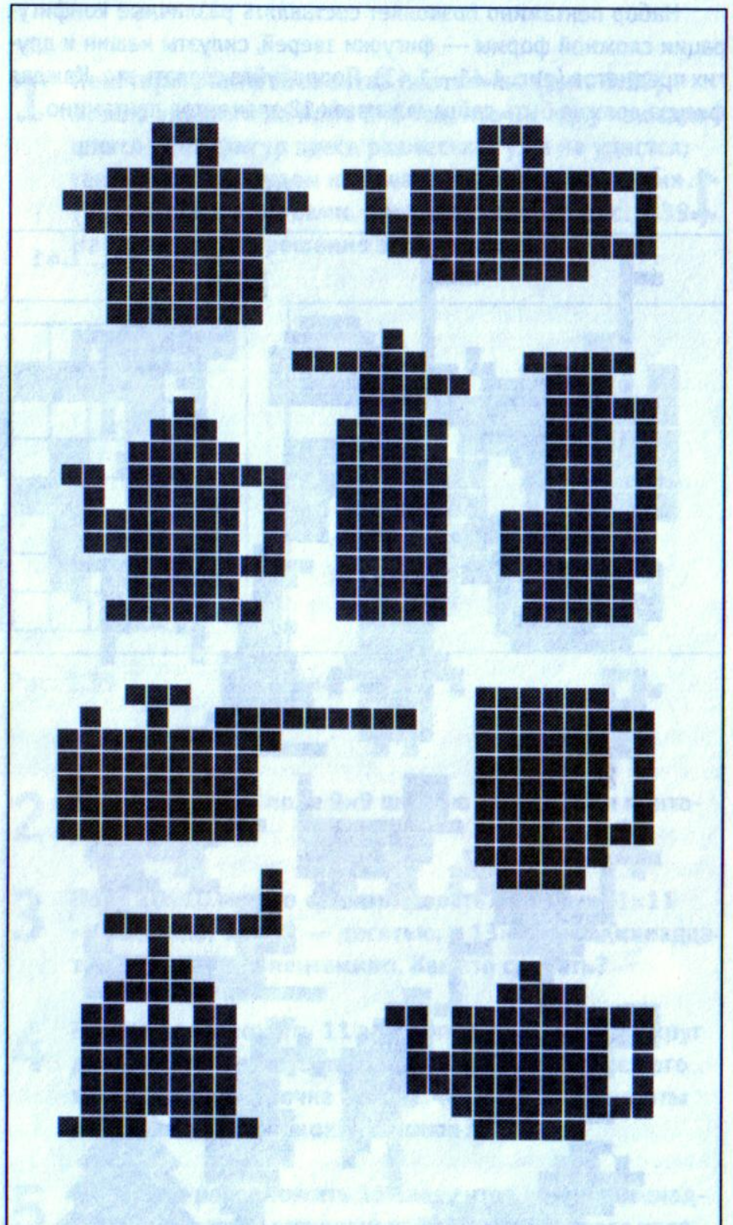


Рис. 1.42

3 Транспорт

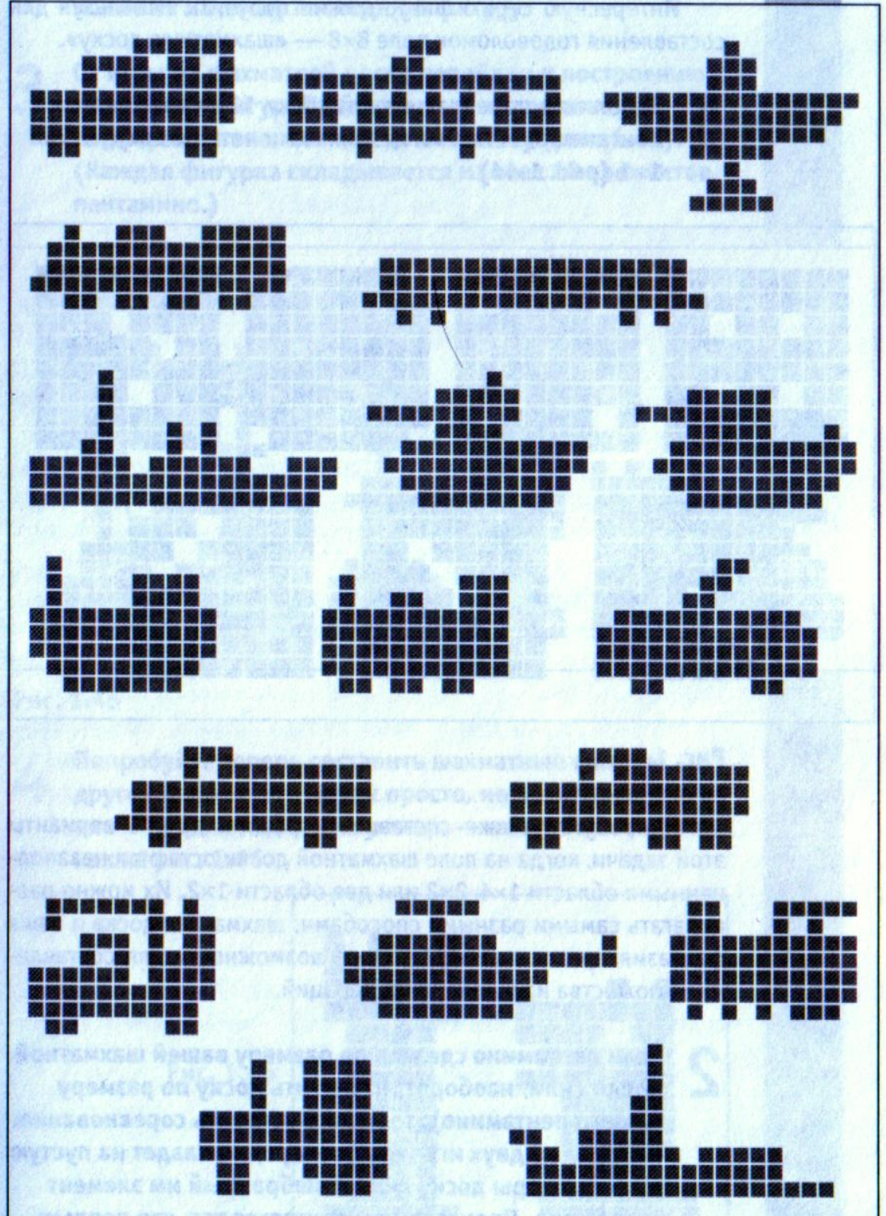


Рис. 1.43

НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

Интересную серию фигур можно получить, используя для составления головоломок поле 8×8 — «шахматную доску».

1 **Заполните поле шахматной доски 12-ю элементами пентамино, оставляя незанятыми четыре квадратика 1×1 (рис. 1.44).**

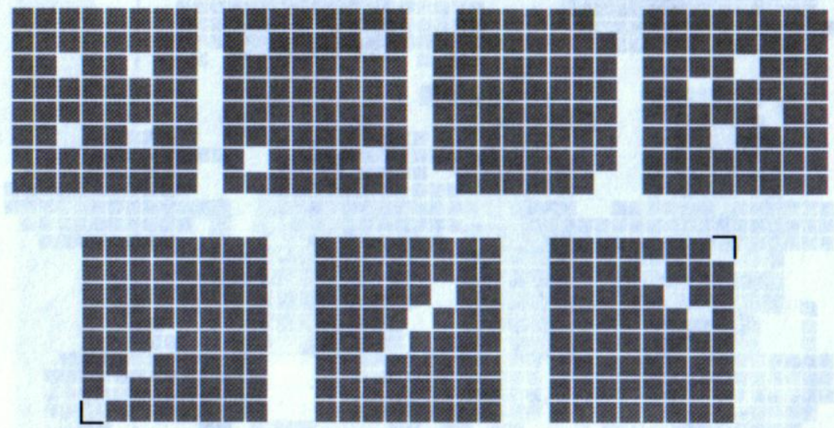


Рис. 1.44

Попробуйте также составить и решить другие варианты этой задачи, когда на поле шахматной доски остаются незаполненными области 1×4, 2×2 или две области 1×2. Их можно располагать самыми разными способами: шахматная доска и ваша фантазия предоставляют большие возможности для составления множества изящных конфигураций.

2 **Если пентамино сделать по размеру вашей шахматной доски (или, наоборот, начертить доску по размеру вашего пентамино), то можно устроить соревнование. Каждый из двух игроков поочередно кладет на пустую в начале игры доску любой выбранный им элемент пентамино. Проигравшим считается тот, кто первым не сможет найти место для любой из еще не использованных фигур. Если же все 12 фигур успешно размещены на доске, то выигравшим считается тот, кто положил на доску последнюю фигуру.**

3 **От игры на шахматной доске перейдем к построению шахматных фигур. Предлагаем вам сложить короля, ферзя, слона, коня, ладью и пешку (рис. 1.45). (Каждая фигурка складывается из всех 12 элементов пентамино.)**

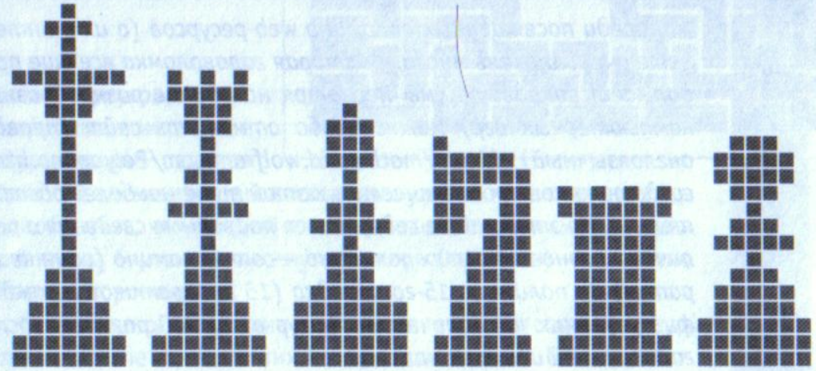
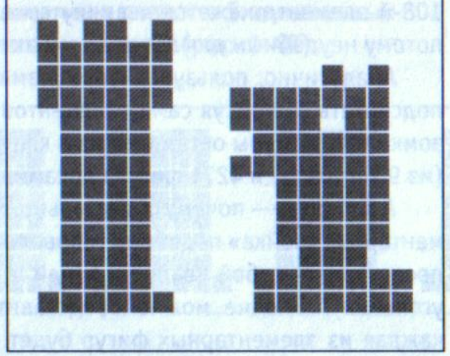


Рис. 1.45

4 **Попробуйте теперь составить шахматные фигуры другой формы. Это не так просто, но возможно. Две из них — конь и ладья, например, — могут быть такими, как на рис. 1.46.**

Рис. 1.46



ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

ГЛАВА 1. МНОГОЛИКОЕ ПОЛИМИНО
Пентамино

ПРОСТАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Решение: фигура 1 на рис. 1.
2. Решение: фигура 2 на рис. 1.
3. Решение: фигура 3 на рис. 1.
4. Решение: фигура 4 на рис. 1.
5. Решение: фигура 5 на рис. 1.
6. Решение: фигура 6 на рис. 1.
7. Решение: фигура 7 на рис. 1.
8. Решение: фигура 8 на рис. 1.

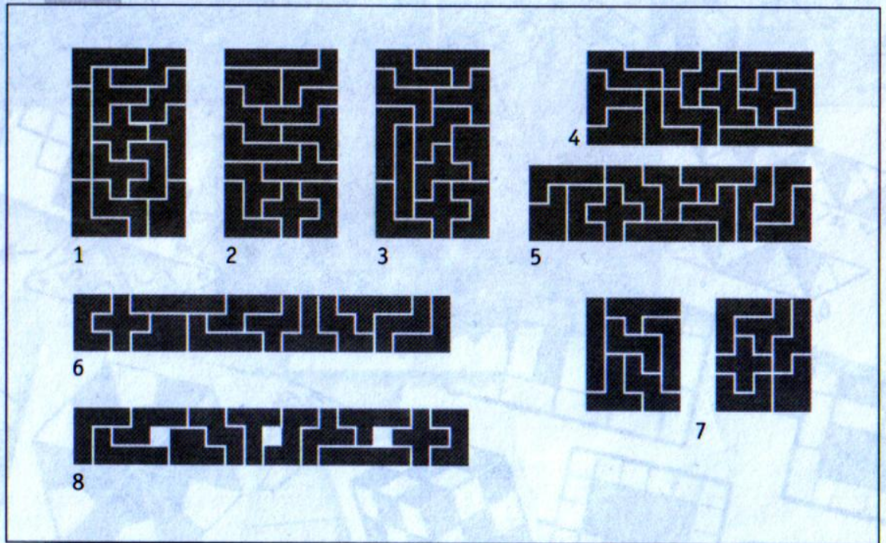


Рис. 1

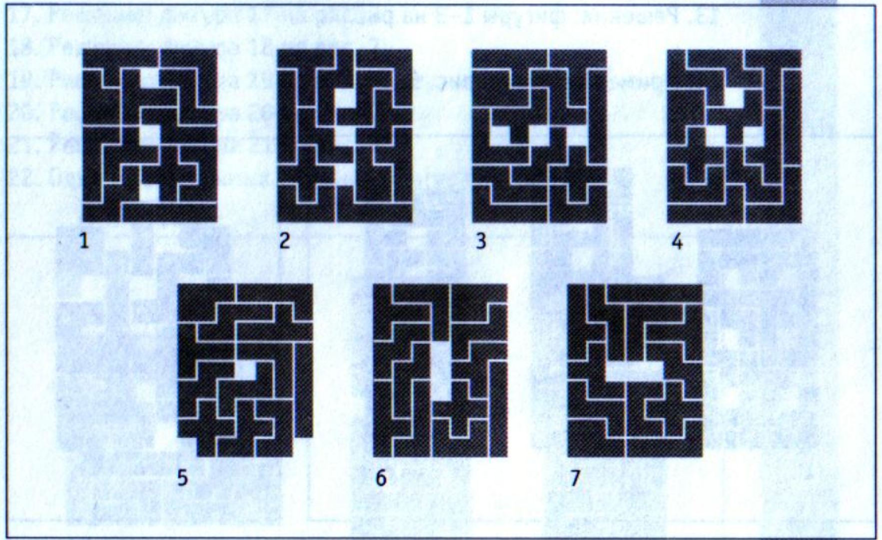


Рис. 2

11. Примеры решений: фигуры 1–7 на рис. 2.

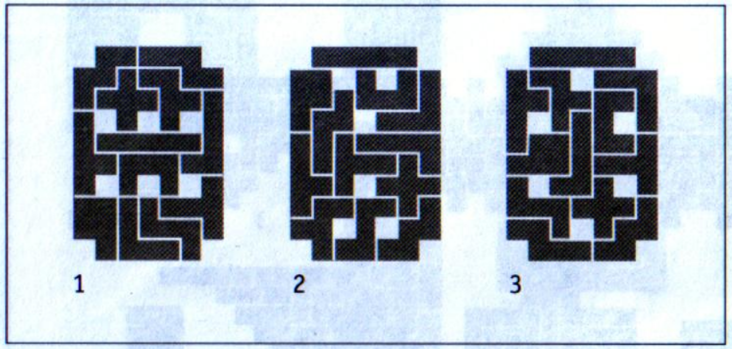


Рис. 3

12. Примеры решений: фигуры 1–3 на рис. 3.

13. Решения: фигуры 1–3 на рис. 4.

14. Пример решения: рис. 5.

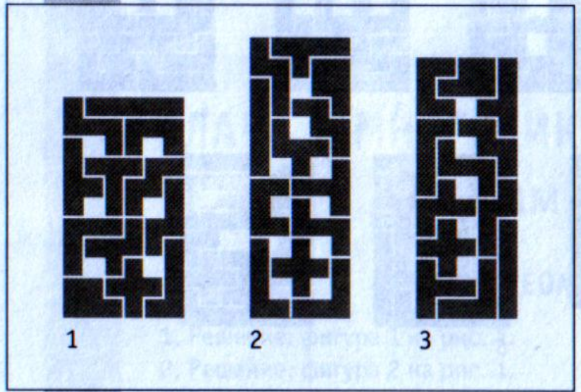


Рис. 4

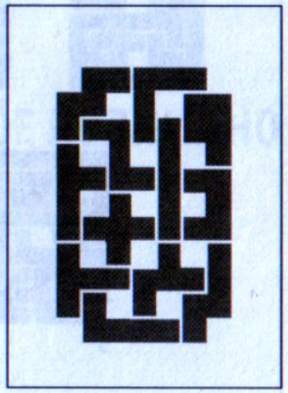


Рис. 5

16. Решения: фигуры 1–7 на рис. 6.

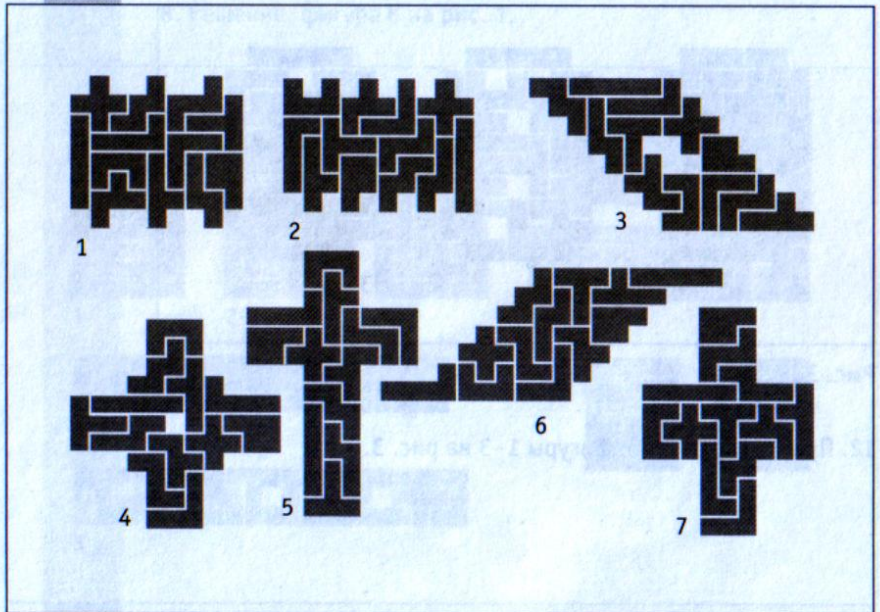


Рис. 6

17. Решение: фигура 17 на рис. 7.
18. Решение: фигура 18 на рис. 7.
19. Решение: фигура 19 на рис. 7.
20. Решение: фигура 20 на рис. 7.
21. Решение: фигура 21 на рис. 7.
22. Одно из возможных решений: фигура 22 на рис. 7.

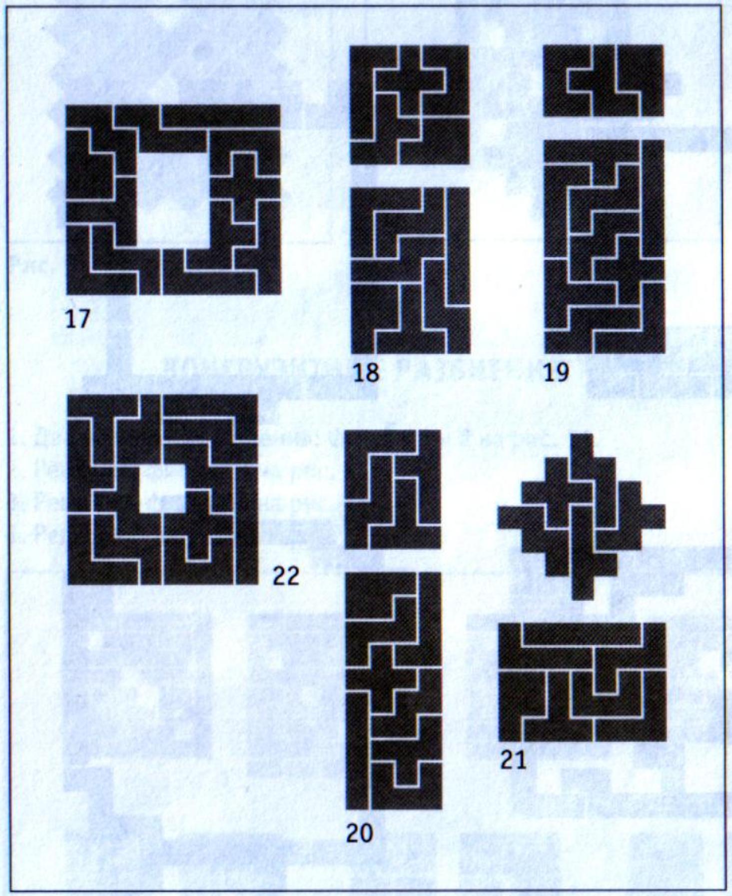


Рис. 7

ПЕНТАМИНО-ФЕРМЫ

1. Решение: фигура 1 на рис. 8.
2. Решение: фигура 2 на рис. 8.
3. Решение: фигура 3 на рис. 8.
4. Решение: фигура 4 на рис. 8.

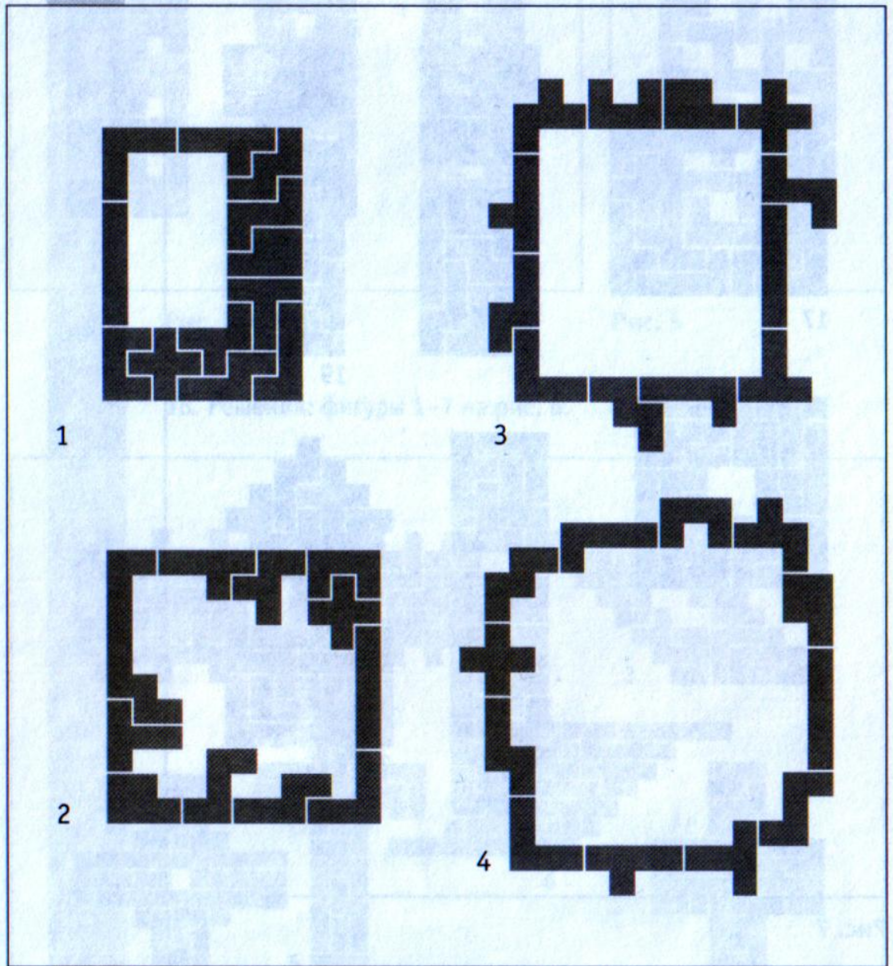


Рис. 8

ПЕНТАМИНО-АРКИ

1. Решение: фигура на рис. 9.
3. Решение: фигура на рис. 10.

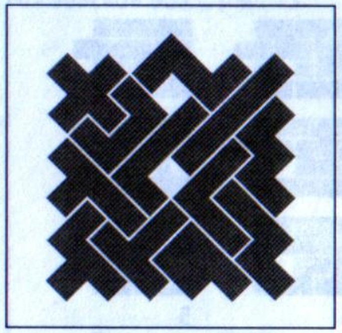


Рис. 9

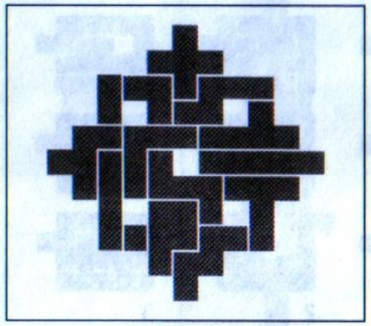


Рис. 10

КОНГРУЭНТНЫЕ РАЗБИЕНИЯ

1. Два возможных решения: фигуры 1 и 2 на рис. 11.
2. Решение: фигуры 3 на рис. 11.
3. Решение: фигуры 4 на рис. 11.
4. Решение: фигуры 5 на рис. 11.

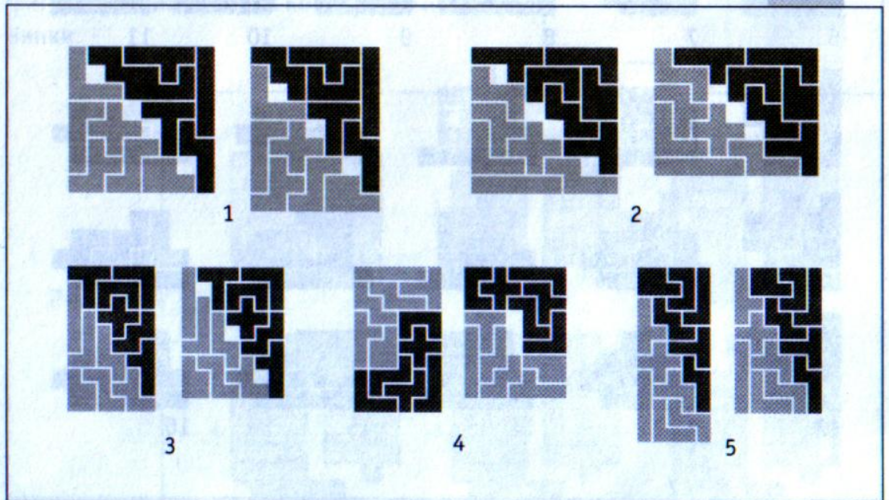


Рис. 11

5. Решения: фигуры 1—16 на рис. 12.

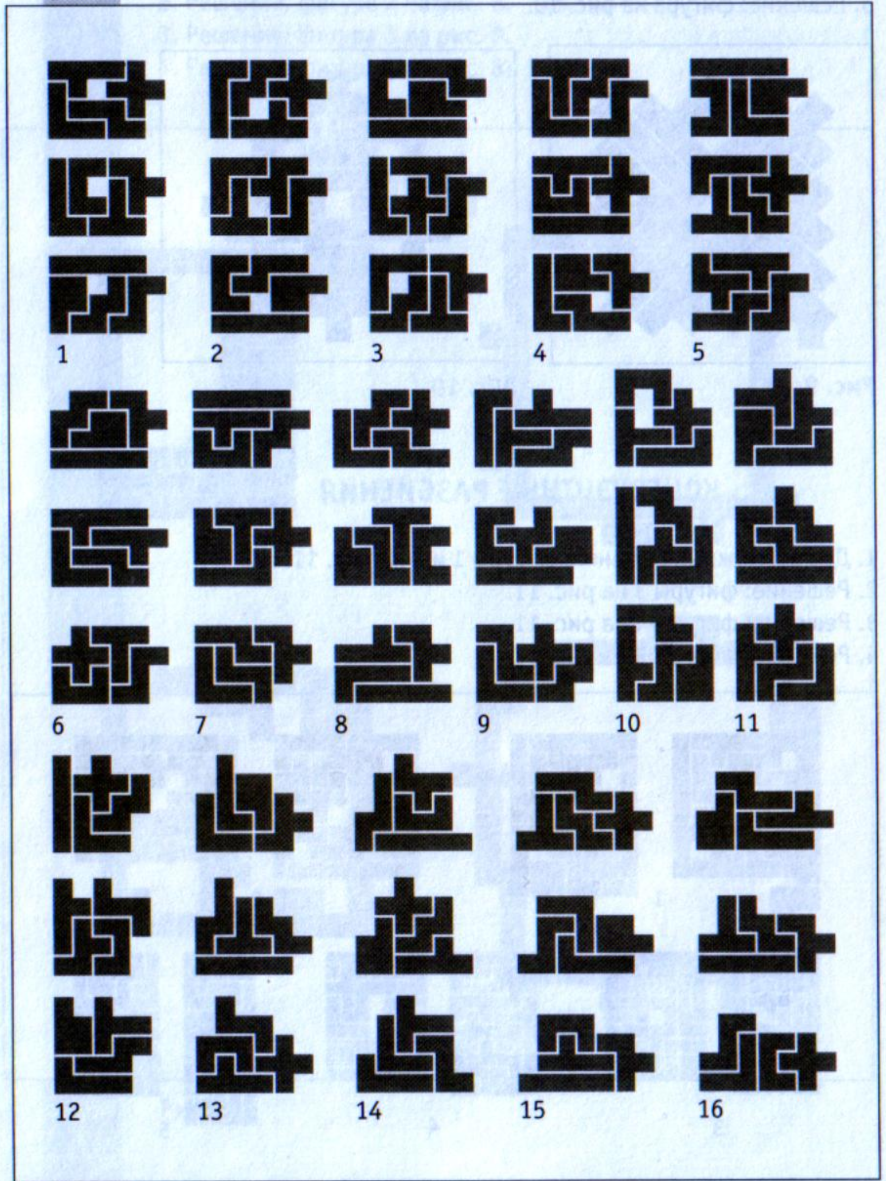


Рис. 12

БАШНЯ МАКСИМАЛЬНОЙ ВЫСОТЫ

Башню рекордной высоты 32 этажа смогла построить Елена Жукова (г. Истра Московской обл.), рис. 13.

Рис. 13

ОКЛЕЙКА

1. Возможные варианты решений (предложены В. Красноуховым): фигуры 1—6 на рис. 14. Кстати, обратите внимание: все фигуры разбиваются на конгруэнтные половинки.

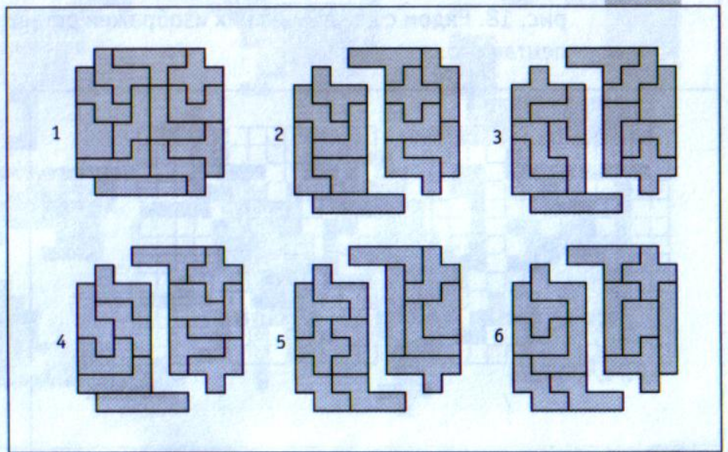


Рис. 14

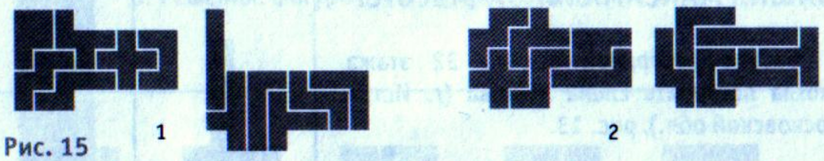


Рис. 15

2. Два возможных решения: фигуры 1 и 2 на рис. 15.

3. Два возможных решения: фигуры 1 и 2 на рис. 16.

4. Два возможных решения: фигуры 1 и 2 на рис. 17.

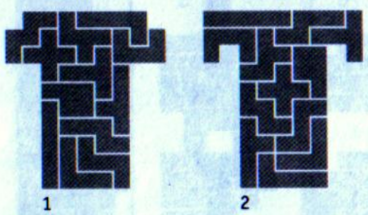


Рис. 16

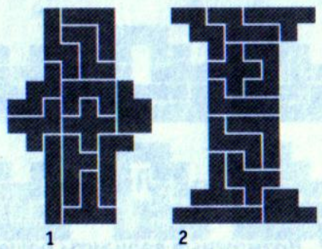


Рис. 17

ЗАГАДКИ «ЗАМИНИРОВАННОГО» ПОЛЯ

3. Два варианта решения для поля 11×11 показаны на рис. 18. Рядом с каждым из них изображен оставшийся элемент пентамино.

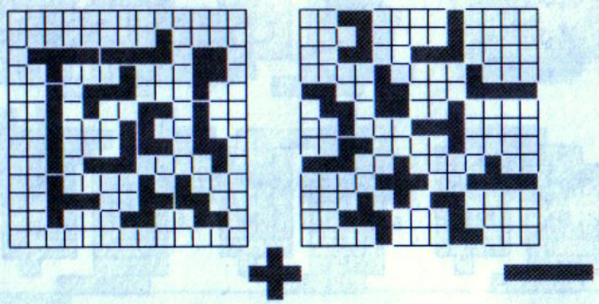
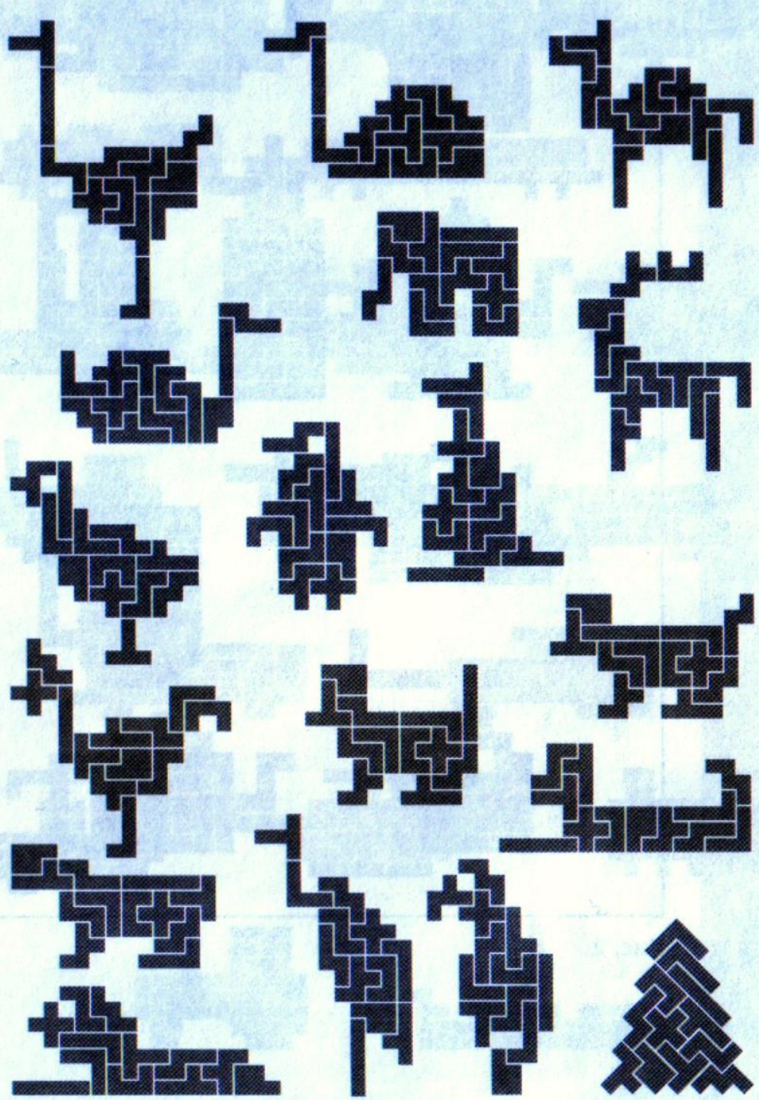


Рис. 18

КОНКРЕТНЫЕ ФИГУРЫ

1. Зоопарк. Решения показаны на рис. 19.

Рис. 19



2. Посуда. Решения показаны на рис. 20.

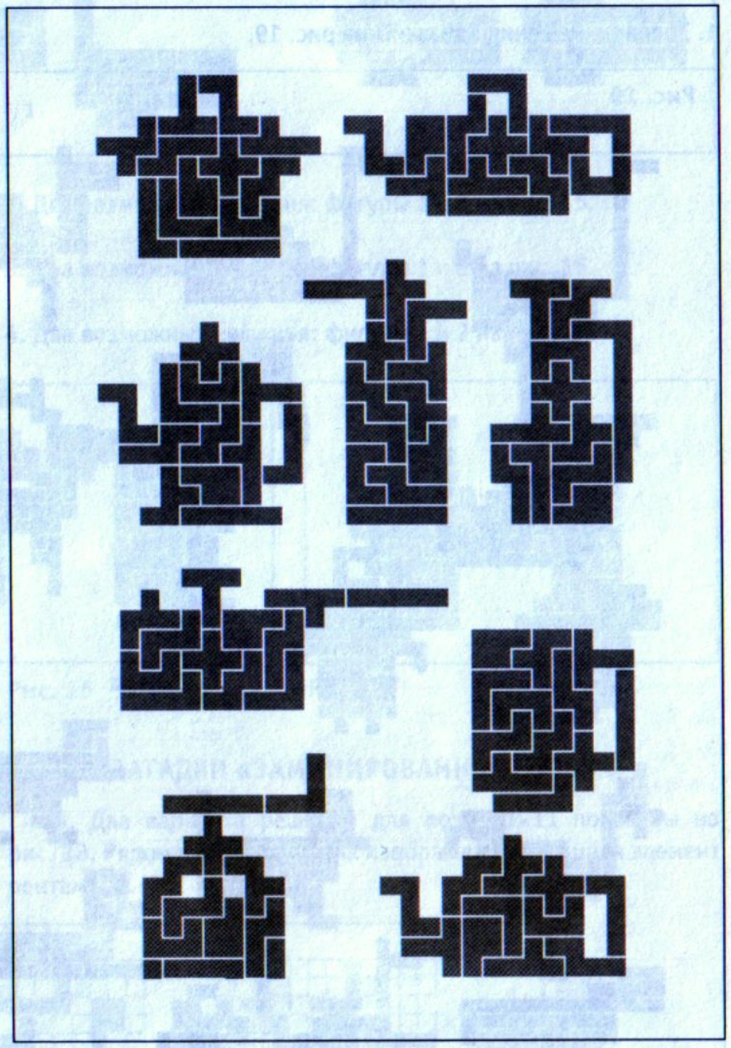


Рис. 20

3. Транспорт. Решения показаны на рис. 21.

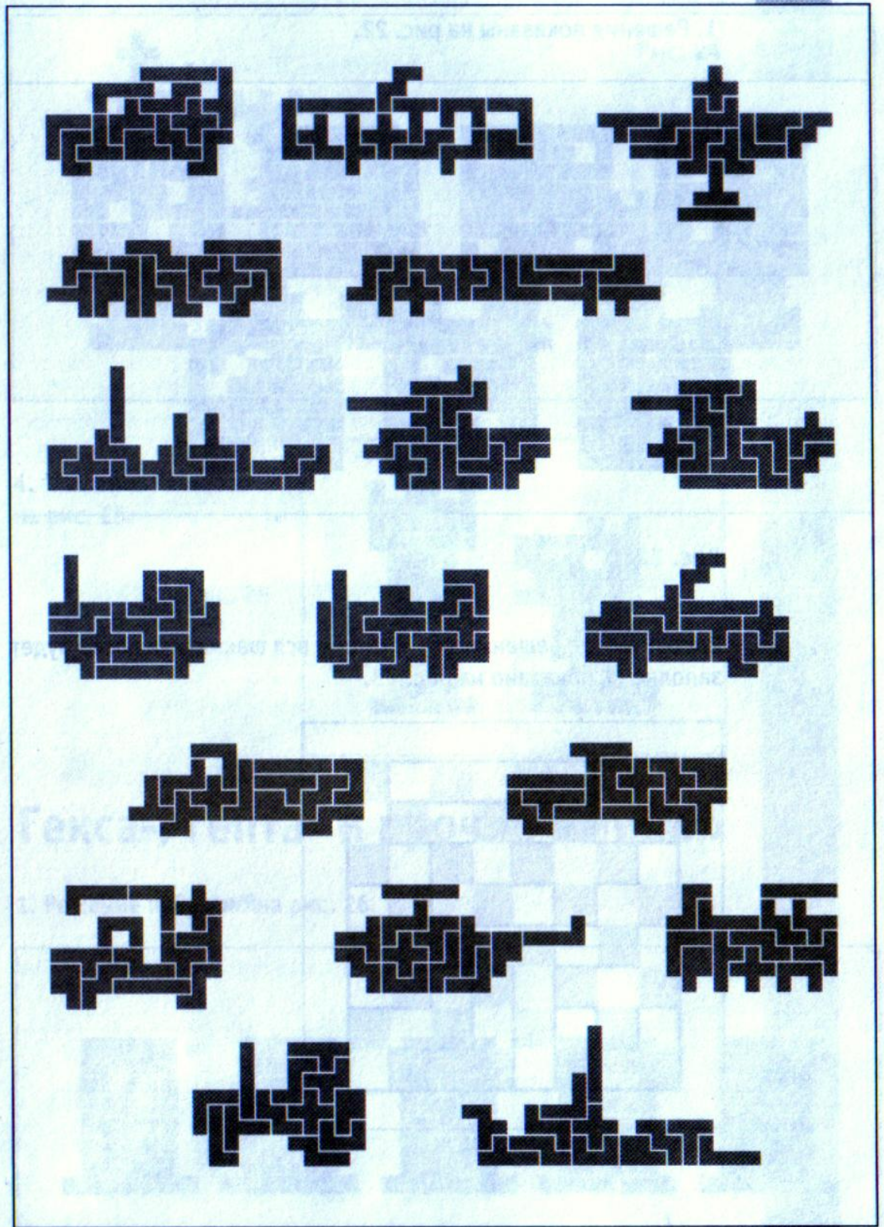


Рис. 21

НА ШАХМАТНОЙ ДОСКЕ

1. Решения показаны на рис. 22.

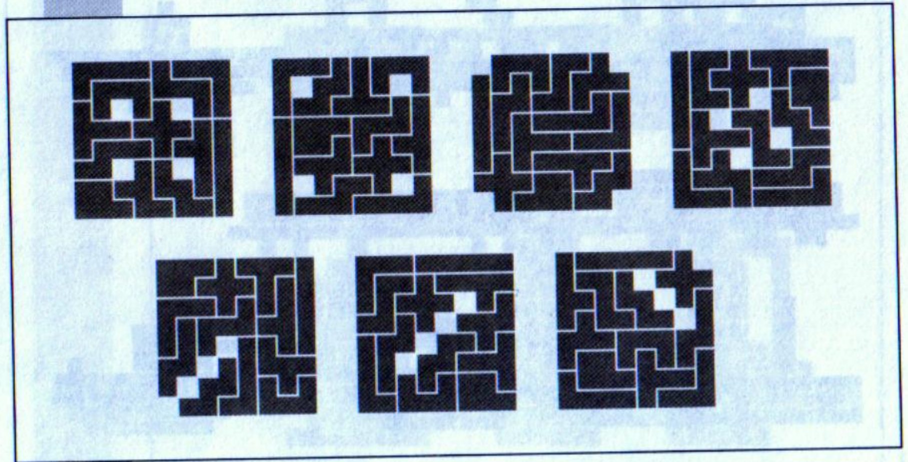


Рис. 22

2. Возможное решение, при котором вся шахматная доска будет заполнена, показано на рис. 23.

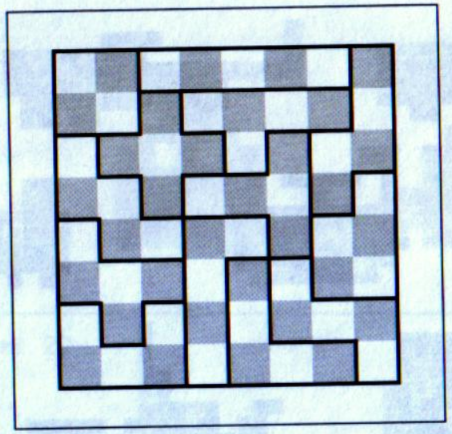


Рис. 23

3. Решения показаны на рис. 24.

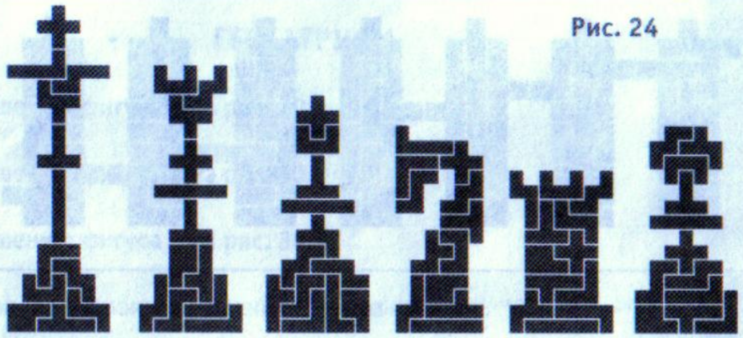


Рис. 24

4. Решения показаны на рис. 25.

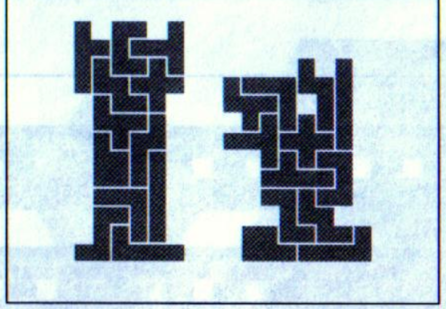


Рис. 25

Гекса-, гепта- и прочие «мино»

1. Решение показано на рис. 26.

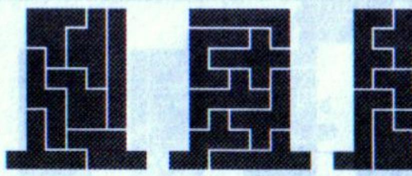


Рис. 26

И З   К Н И Г И

ПУТЕШЕСТВИЕ

ПО СТРАНЕ НАСТОЛЬНЫХ ЛОГИЧЕСКИХ ИГР

РОССИЯ 2005 ИСТРА

ПЕНТАМИНО (12 по 5)

Самая первая задача данной игры была напечатана в 1907 году в книге «**Кентерберийские загадки»** английского сочинителя головоломок Генри Дьюдени. В 1953 году американский математик С. Голомб вновь «изобрёл» эту игру и дал ей название «**Пентамино**». Он написал книгу «**Полиомино**», в которой есть много задач. После публикации головоломки в журнале «**Наука и жизнь**» выяснилось, что есть и российский изобретатель игры «**Пентамино»** – ленинградец Н. Д. Сергиевский, предложивший эту игру в 1935 году под названием «**12 по 5**». В 1951 году его игра участвовала во Всесоюзном конкурсе детской игрушки. В настоящее время игра известна ещё под названиями: «**Пятипольник»**, «**Игра смекалка»**, «**Силуэт–1»**, «**Пентакубики»**.

Головоломка заключается в решении задач так называемой комбинаторной геометрии, занимающейся исследованием взаиморасположения фигур на плоскости, состоит из двенадцати элементов различной конфигурации. Каждый из этих элементов составлен из пяти квадратиков – пентамино.

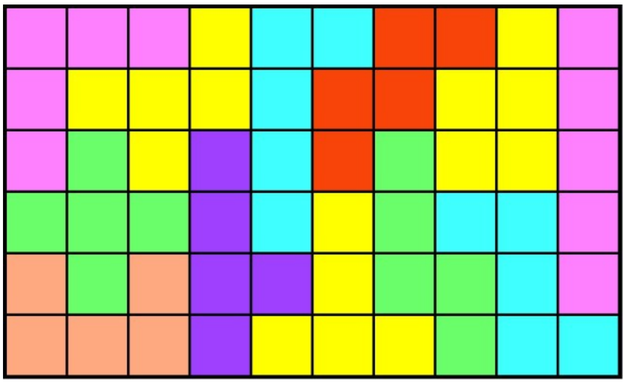
При составлении фигур должны использоваться все двенадцать элементов, не накладываясь один на другой, их можно переворачивать.

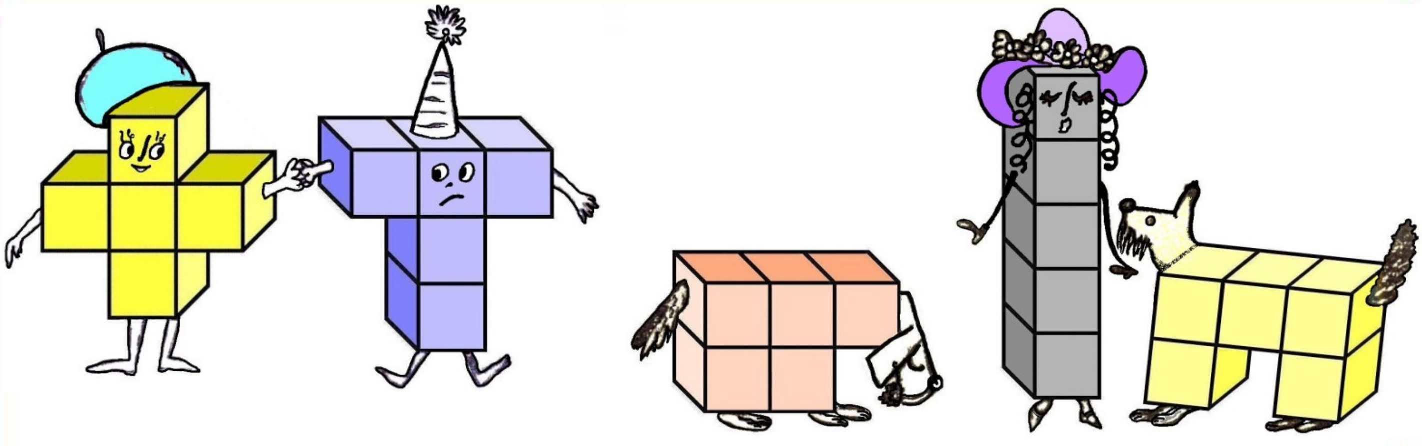
Заданная фигура складывается подбором. Возможным переворотом и переставлением элементов одного к другому. Изготавливается головоломка в основном в виде плоских фишек (элементов) из пластика или дерева, которые легко укладываются в коробочки 6x10, 3x20. Обычно элементы игры-головоломки «**Пентамино**» обозначаются английскими буквами но, бывают случаи, когда цифровое обозначение более рентабельно.

На рисунке вы видите схему укладки игры «**Пентамино**» в коробочки (3x20 и 6x10) и их условное «буквенное и цифровое» обозначения.

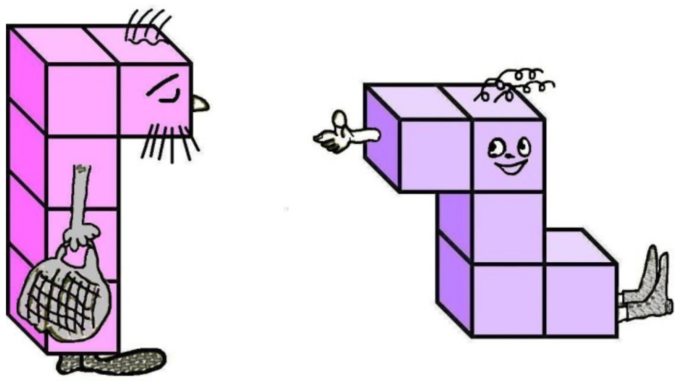
V	L	L	L	L	F	T	T	T	W	W	Z	I	I	I	I	I	X	U	U
V	L	N	N	F	F	F	T	W	W	Y	Z	Z	Z	P	P	X	X	X	U
V	V	V	N	N	N	F	T	W	Y	Y	Y	Y	Z	P	P	P	X	U	U

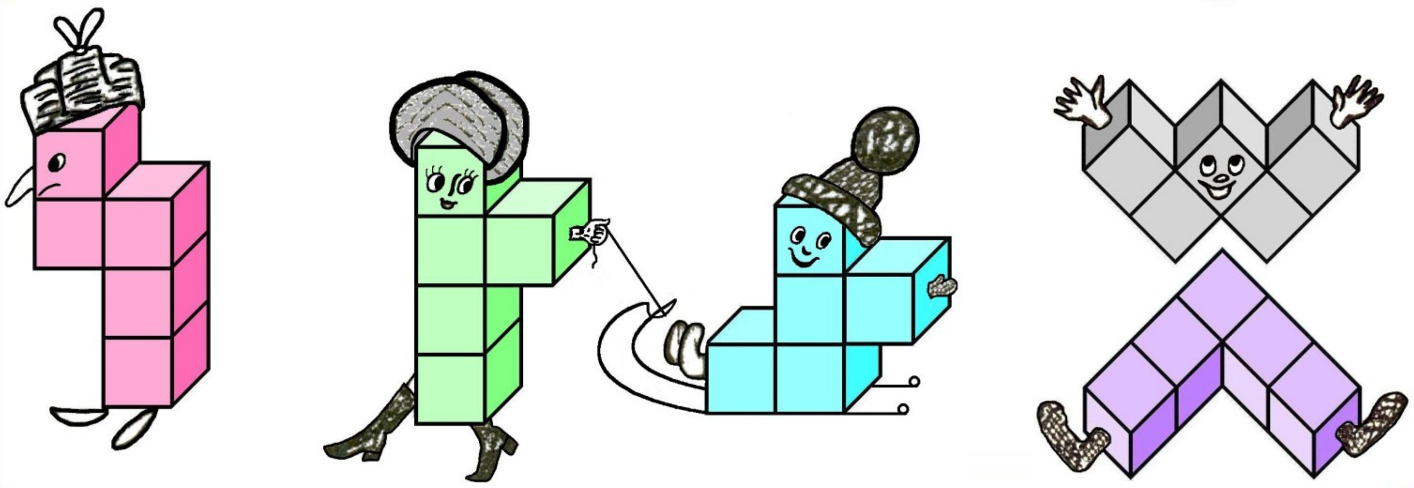
7	7	7	8	11	11	1	6	6	12
7	3	8	8	8	11	1	6	6	12
7	3	3	8	11	11	1	4	6	12
3	3	5	9	9	1	1	4	10	12
5	5	5	2	9	9	4	4	10	12
5	2	2	2	2	9	4	10	10	10



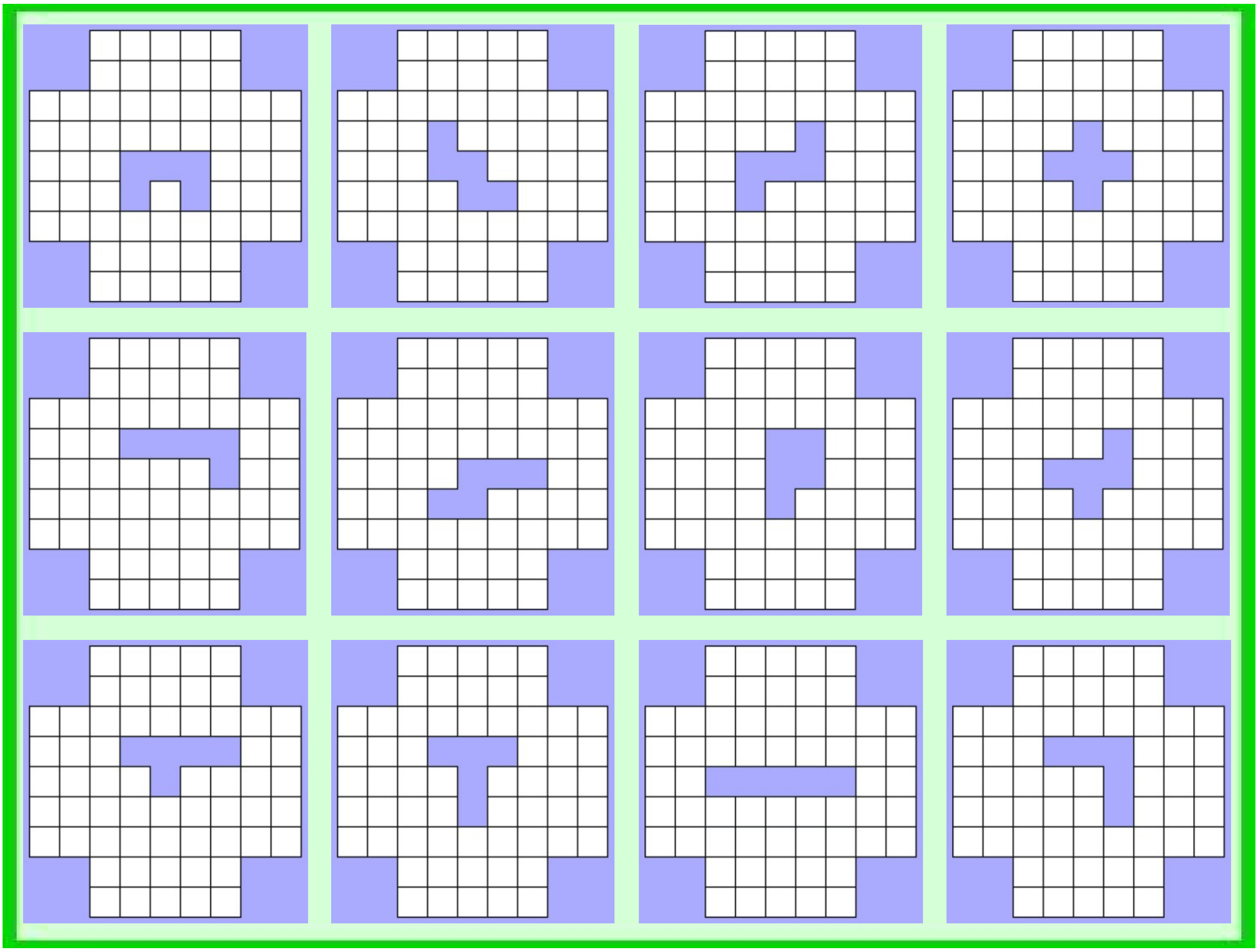


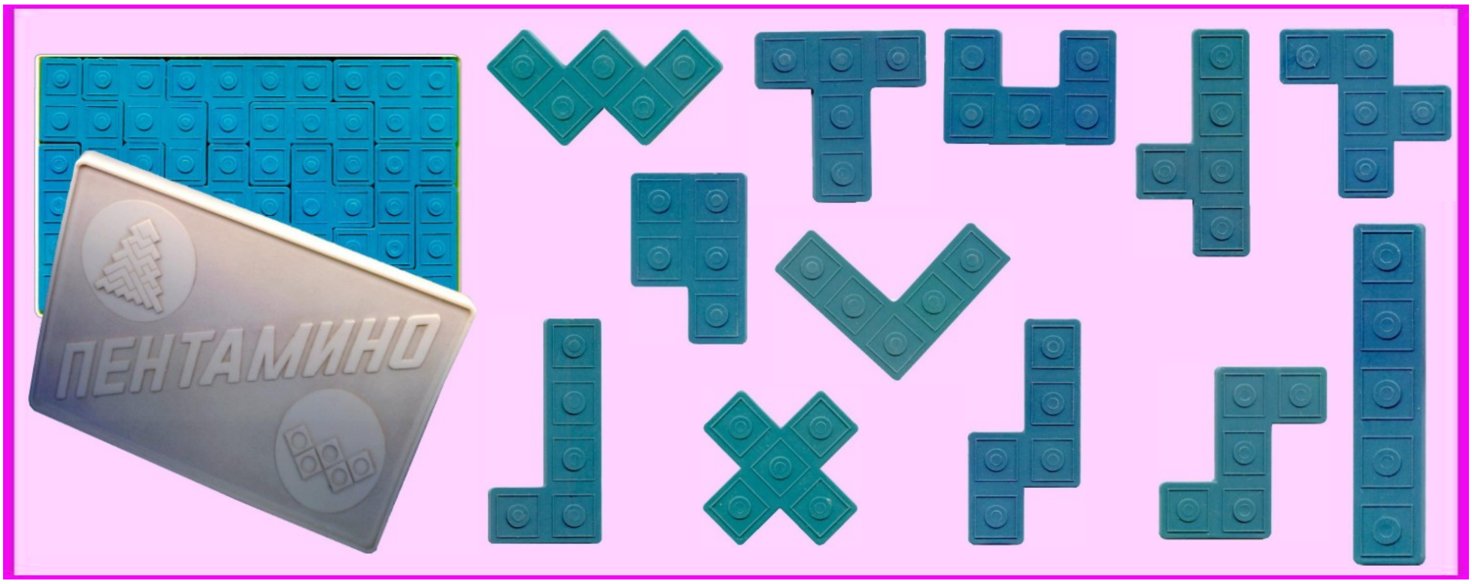
ПЕНТАМИНО - ЗАДАЧИ





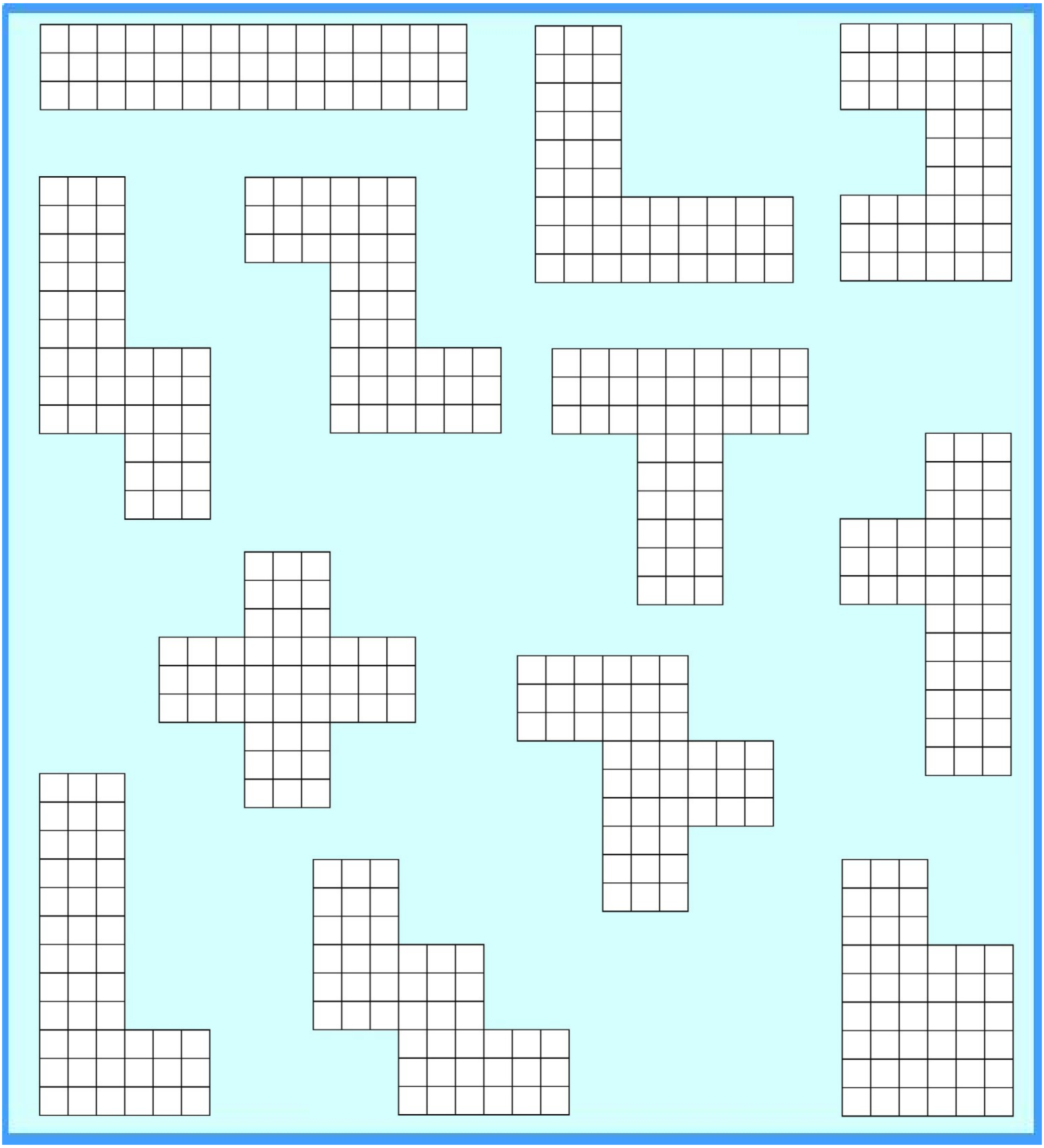
Задачи 1-12. Выложить данные конфигурации из двенадцати элементов **пентамино**, оставляя в центре отверстие в виде одной из фигур **пентамино**.





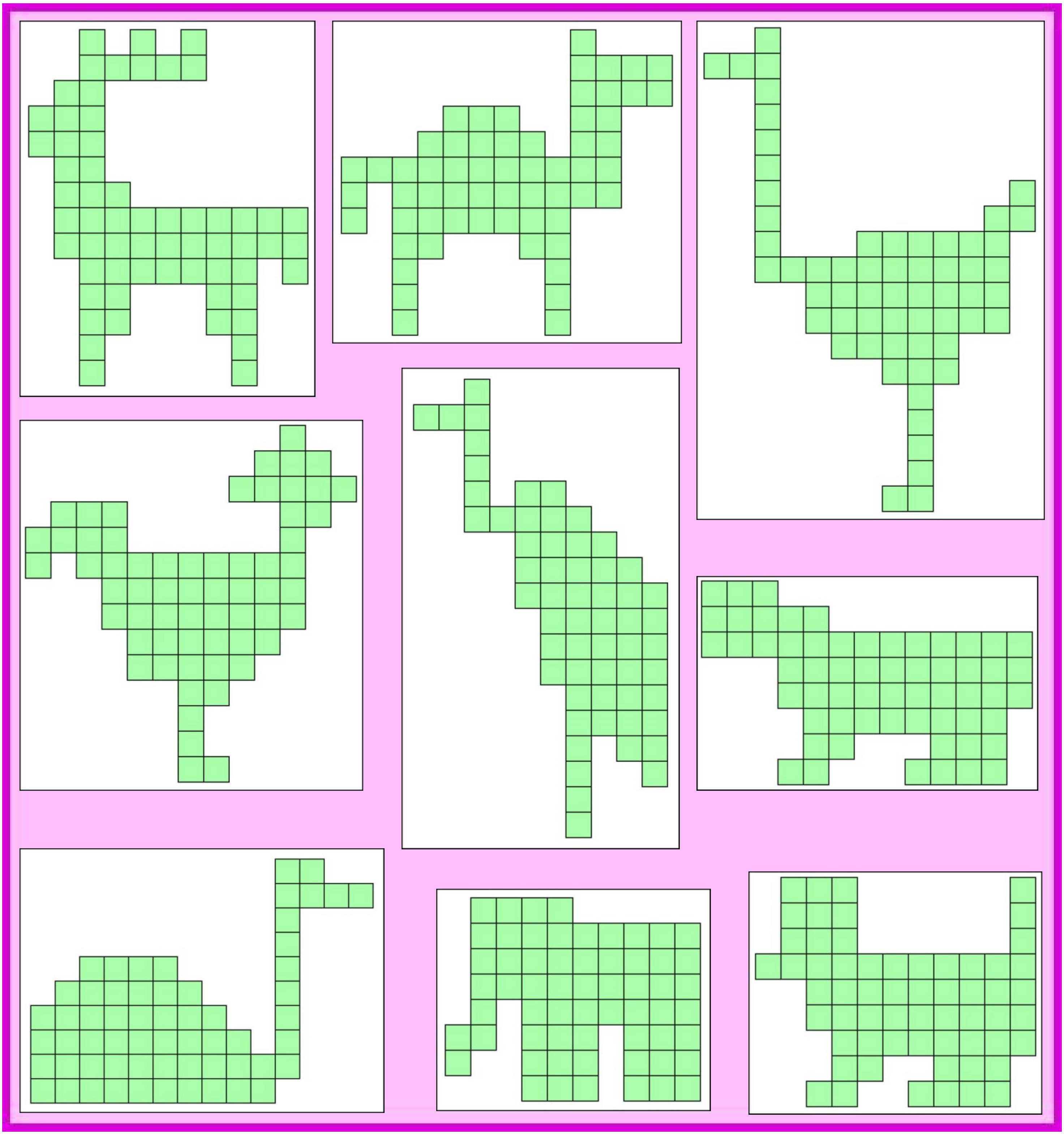
Задачи 13-24. Сложить (утроенные) фигуры игровых элементов головоломки «**Пентамино**» таким образом, чтобы в центральной части каждой из них была размещена исходная фигура.

Каждая фигура укладывается девятью элементами игры «Пентамино».

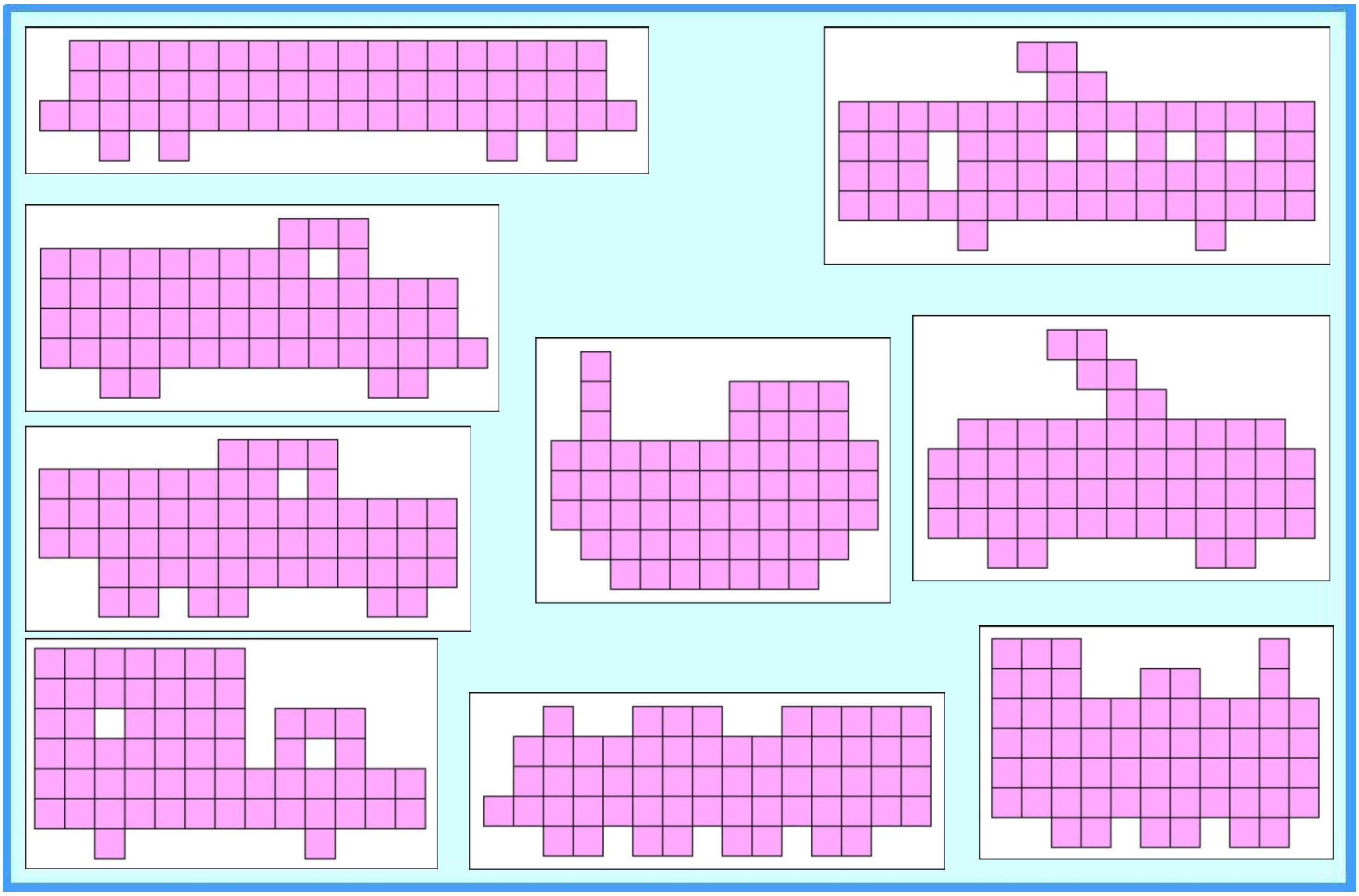


Задачи 25-33. Среди задач **пентамино** представляют интерес не только задачи на составление различных геометрических фигур из 12 элементов игры «**Пентамино**», но и серии «конкретных фигур».

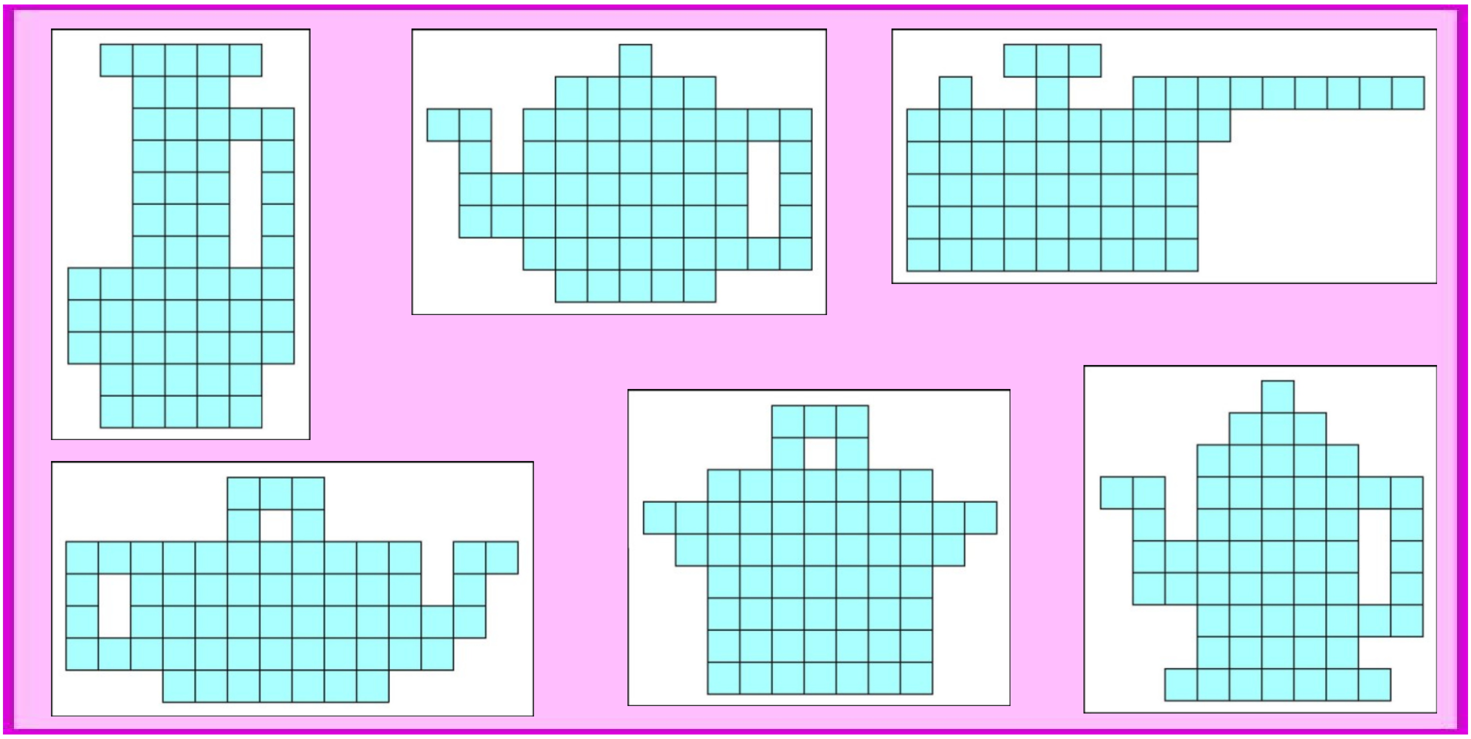
Предлагаем вашему вниманию серию задач «животный мир» - каждая фигурка составлена из 12 элементов игры-головоломки «**Пентамино**».



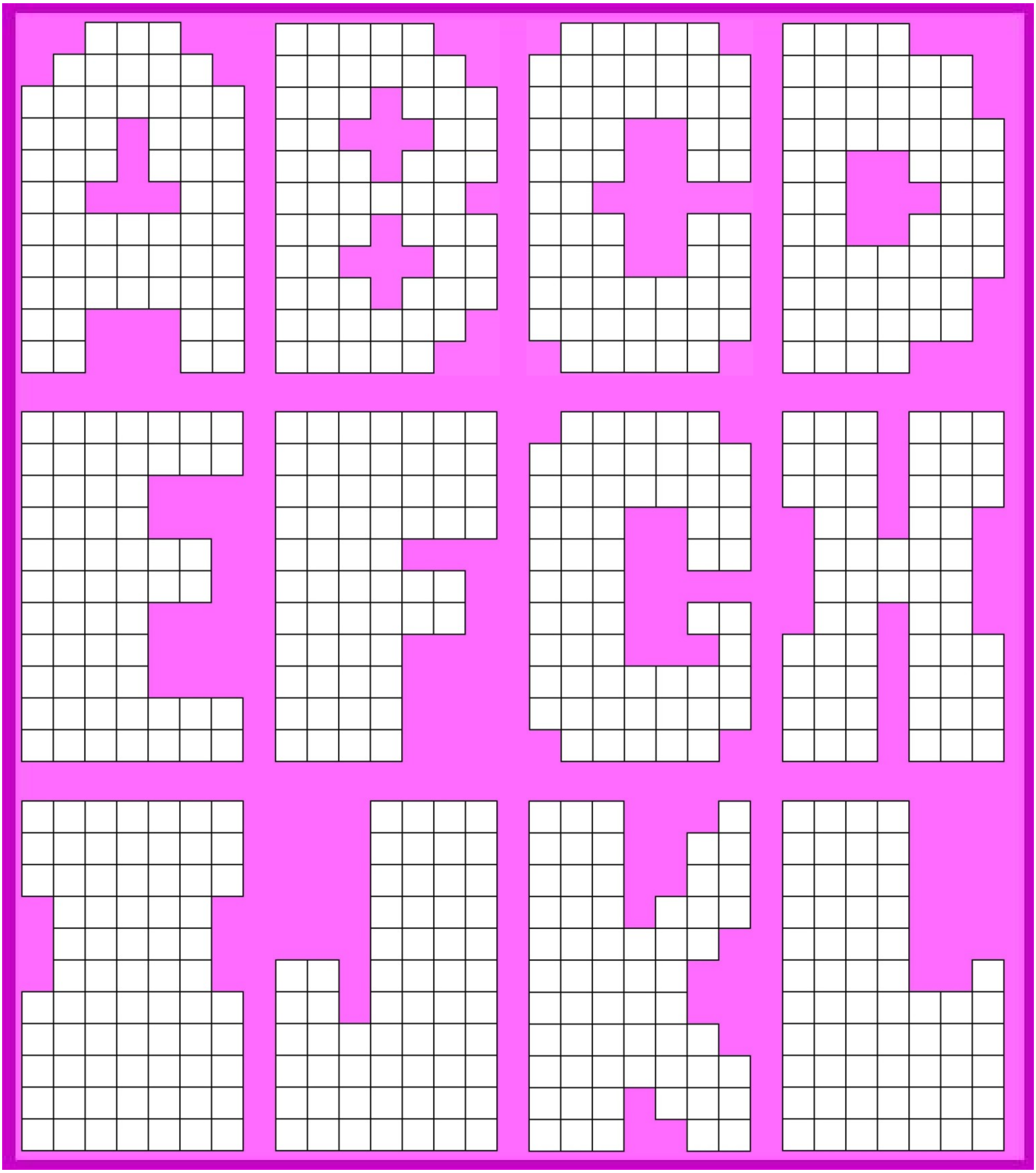
Задачи 34-42. Попробуйте сложить серию фигур «транспорт».

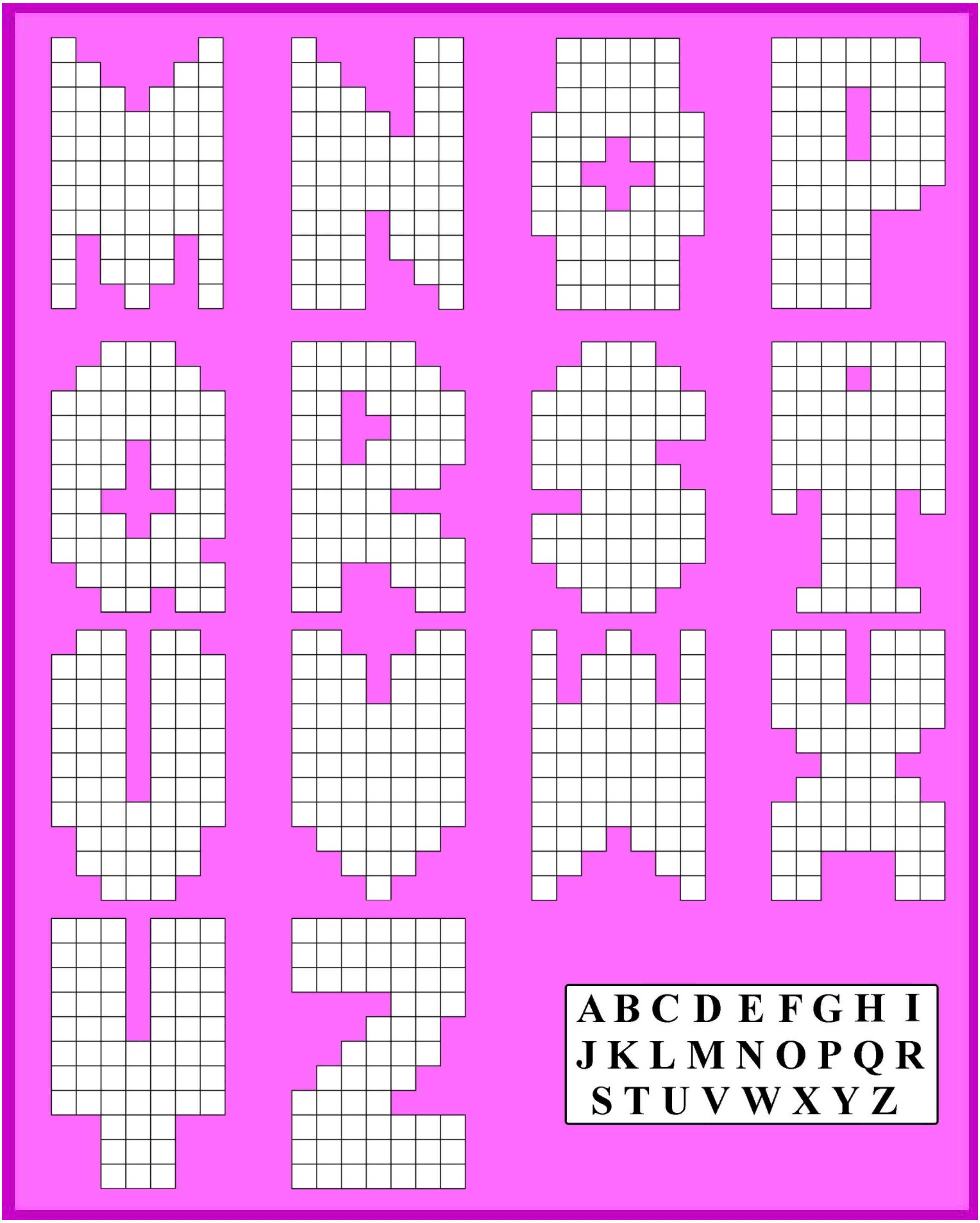


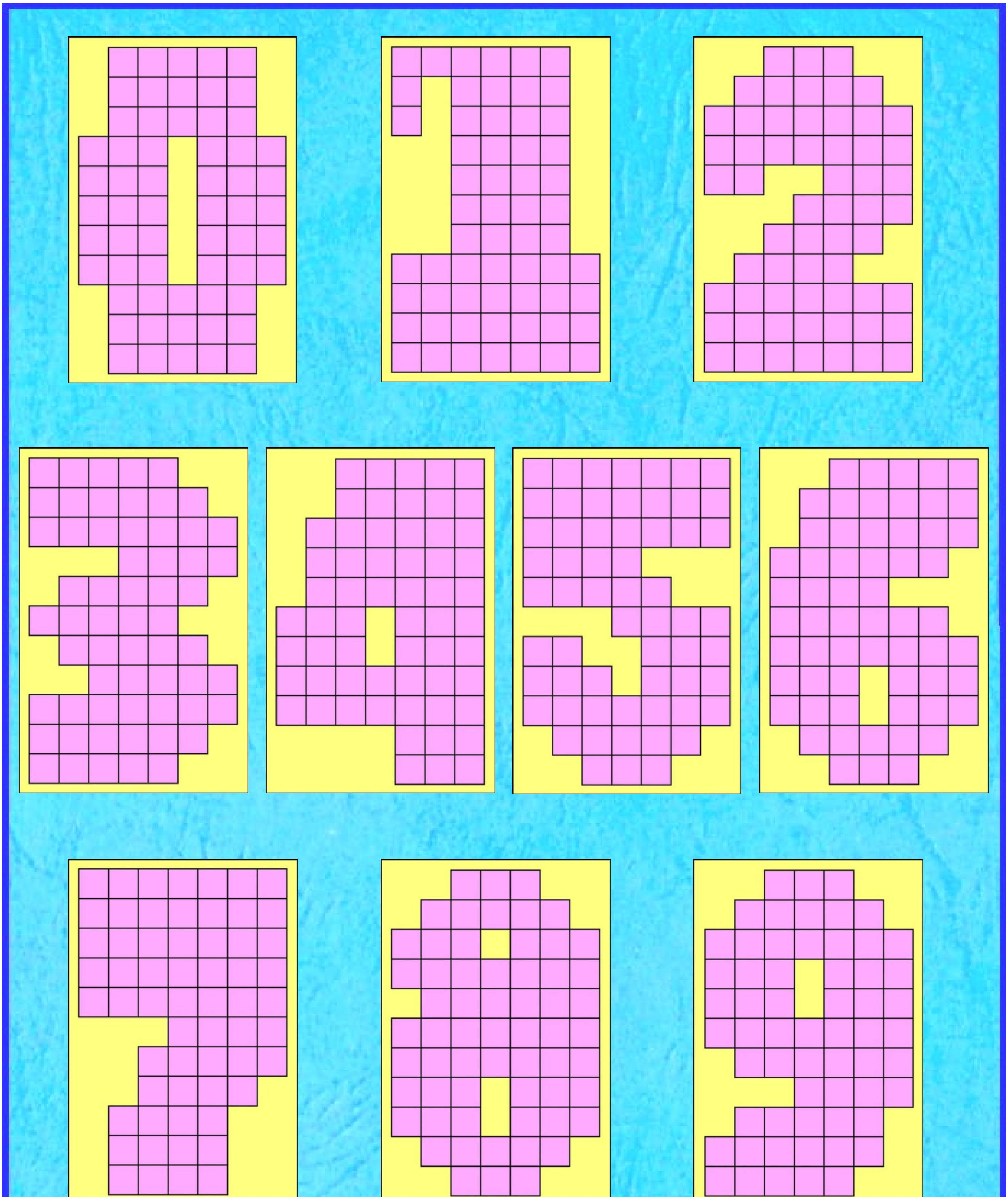
Задачи 43-48. На данных рисунках перед вами серия фигур «посуда».



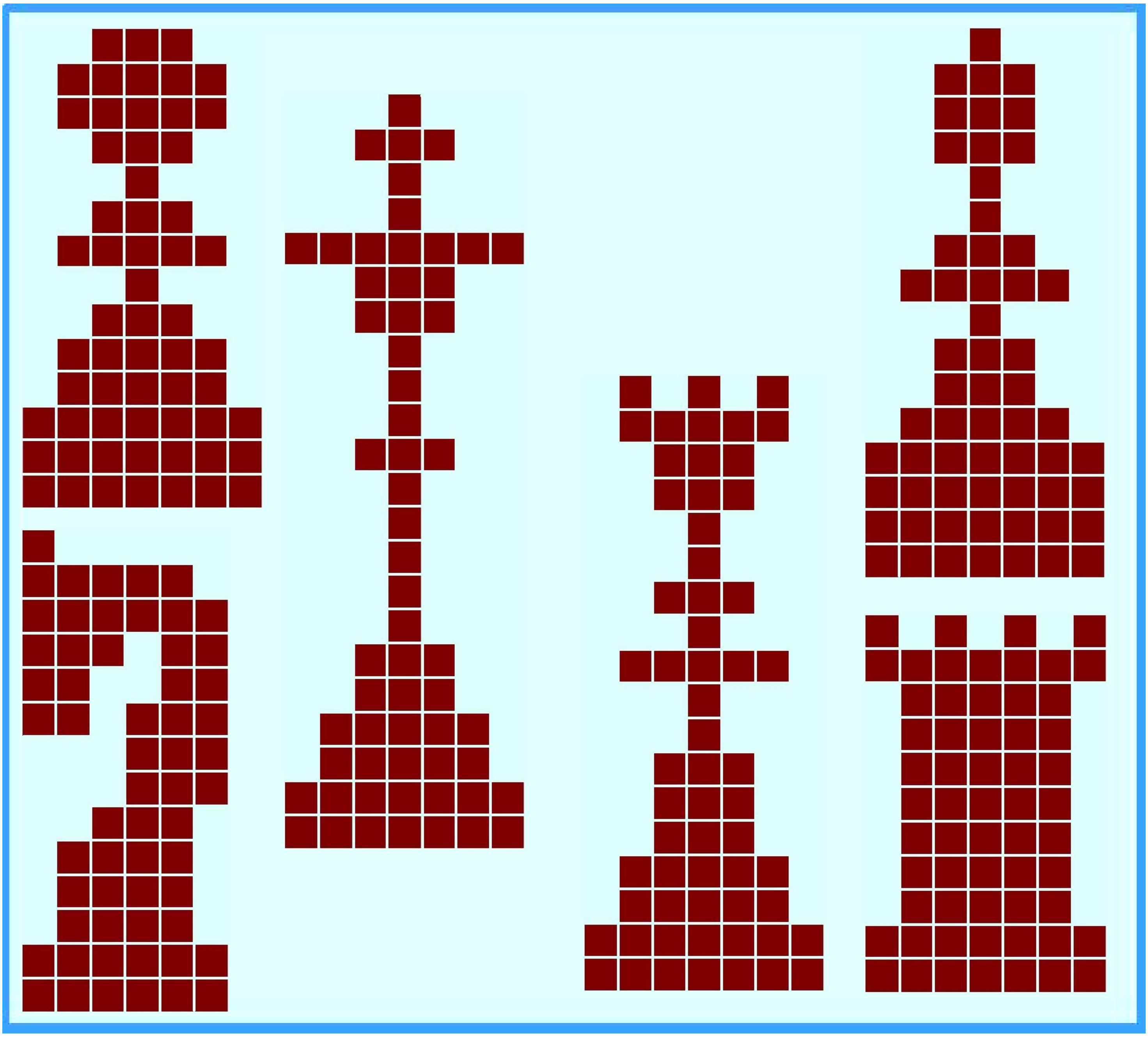
Задачи 49-84. R.L. Judd и M.E. Zosel составили оригинальные серии задач: «буквы английского алфавита» и «цифры»; в которых каждая фигура так же составлена из 12-ти элементов игры-головоломки «**Пентамино**».




A B C D E F G H I
J K L M N O P Q R
S T U V W X Y Z

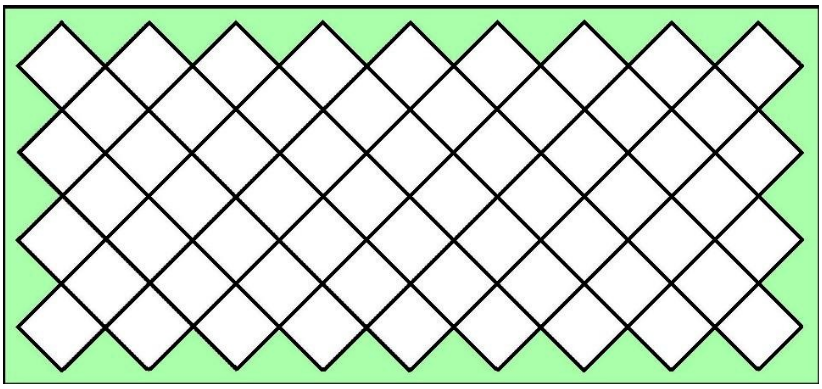


Задачи **85-90.** Продолжение построения фигур из 12 элементов **пентамино** по заданной тематике - «шахматные фигуры».

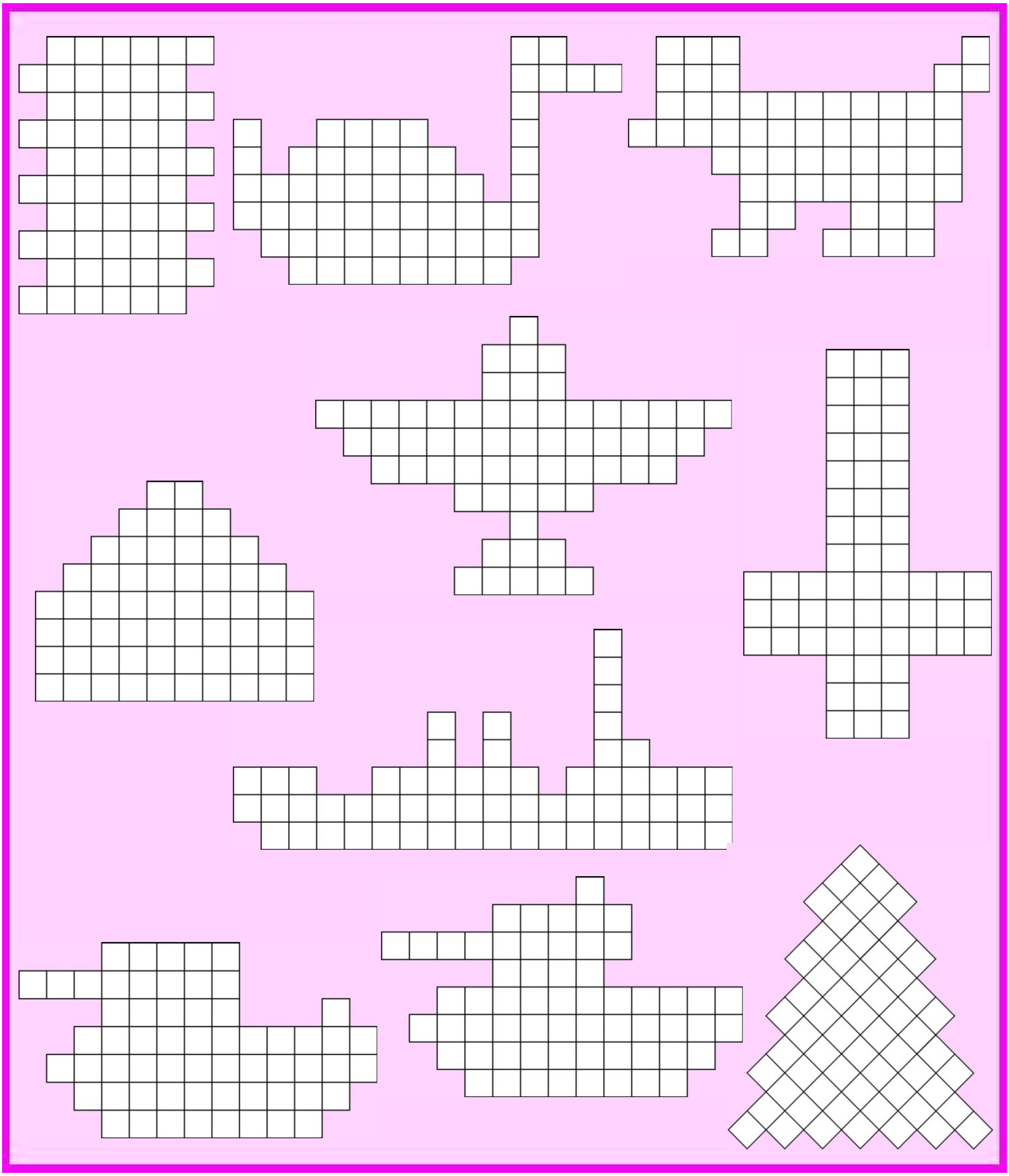


Задача 91. **Данную «заданную фигуру» построить ещё никому не удалось, хотя в ней ровно 60 клеток.**

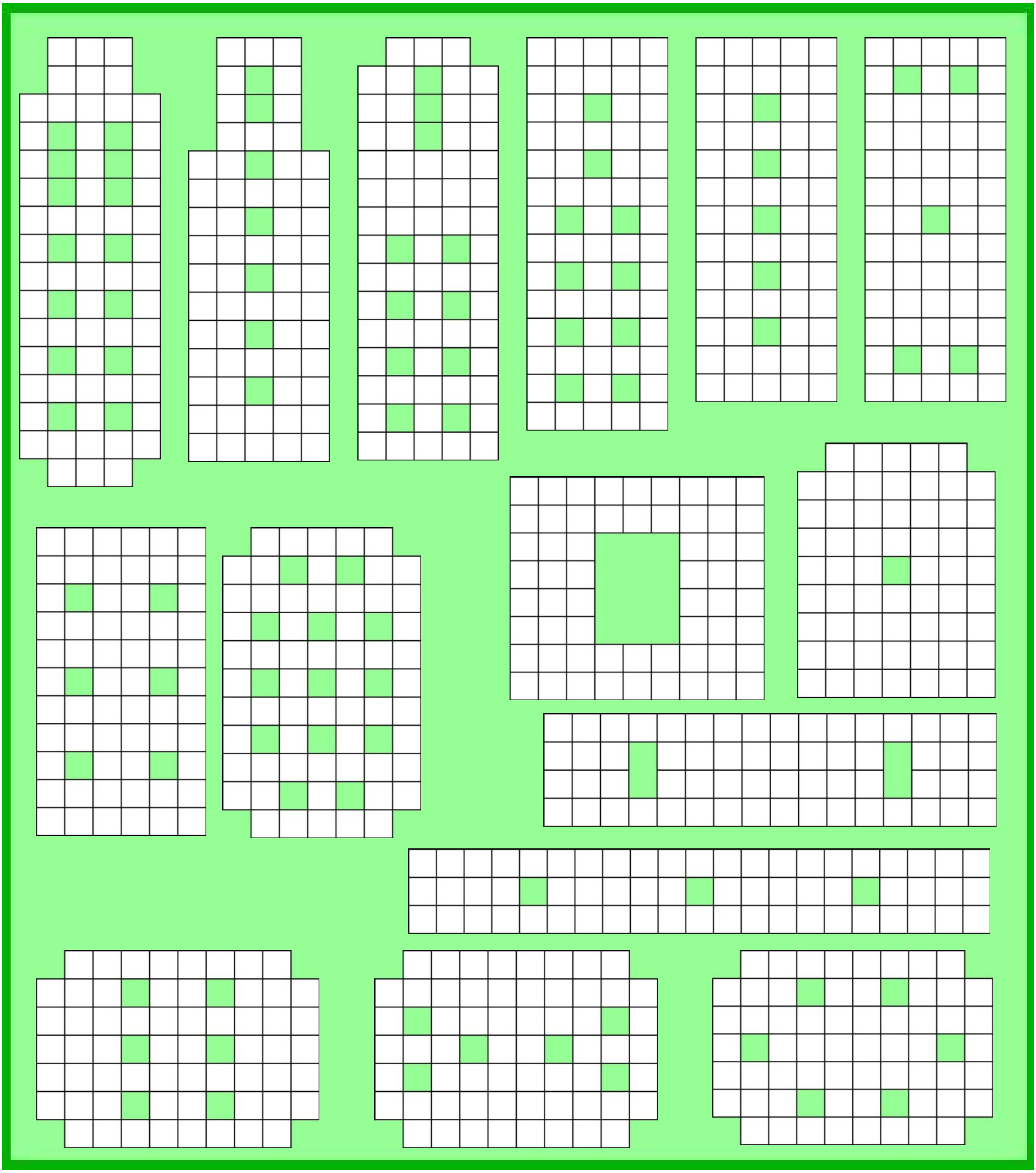
А **может она не решается?**

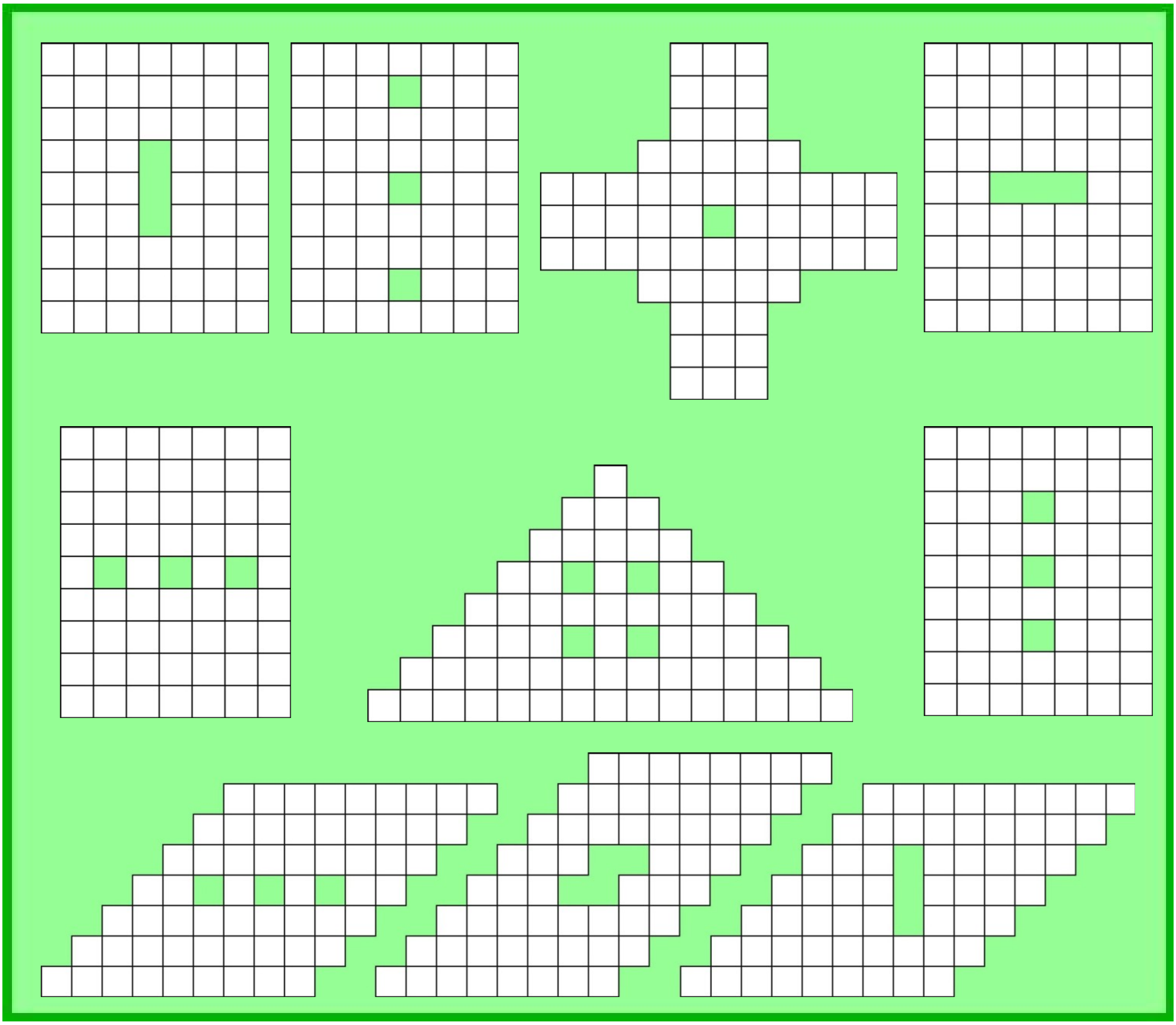


Задачи 92-101. Калейдоскоп задач на укладку 12 элементов игры-головоломки «**Пентамино**» на сплошные различные силуэты фигур.

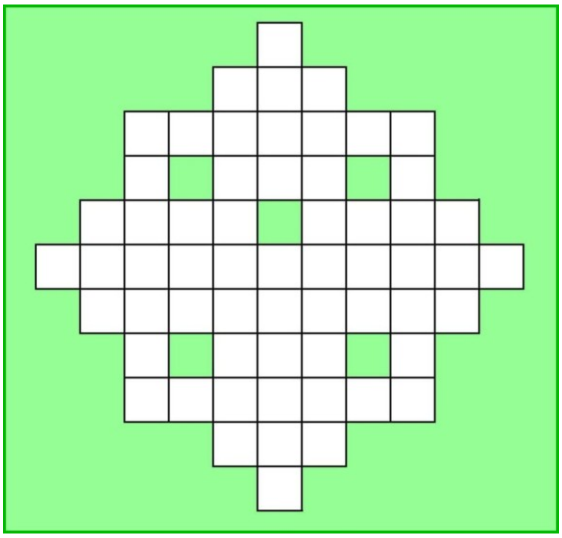


Задачи 102-139. Вернёмся вновь к более сложным построениям (геометрическим). Классическая укладка 12 элементов игры «**Пентамино**» на «симметричные фигуры с окнами» – наиболее сложные задачи.



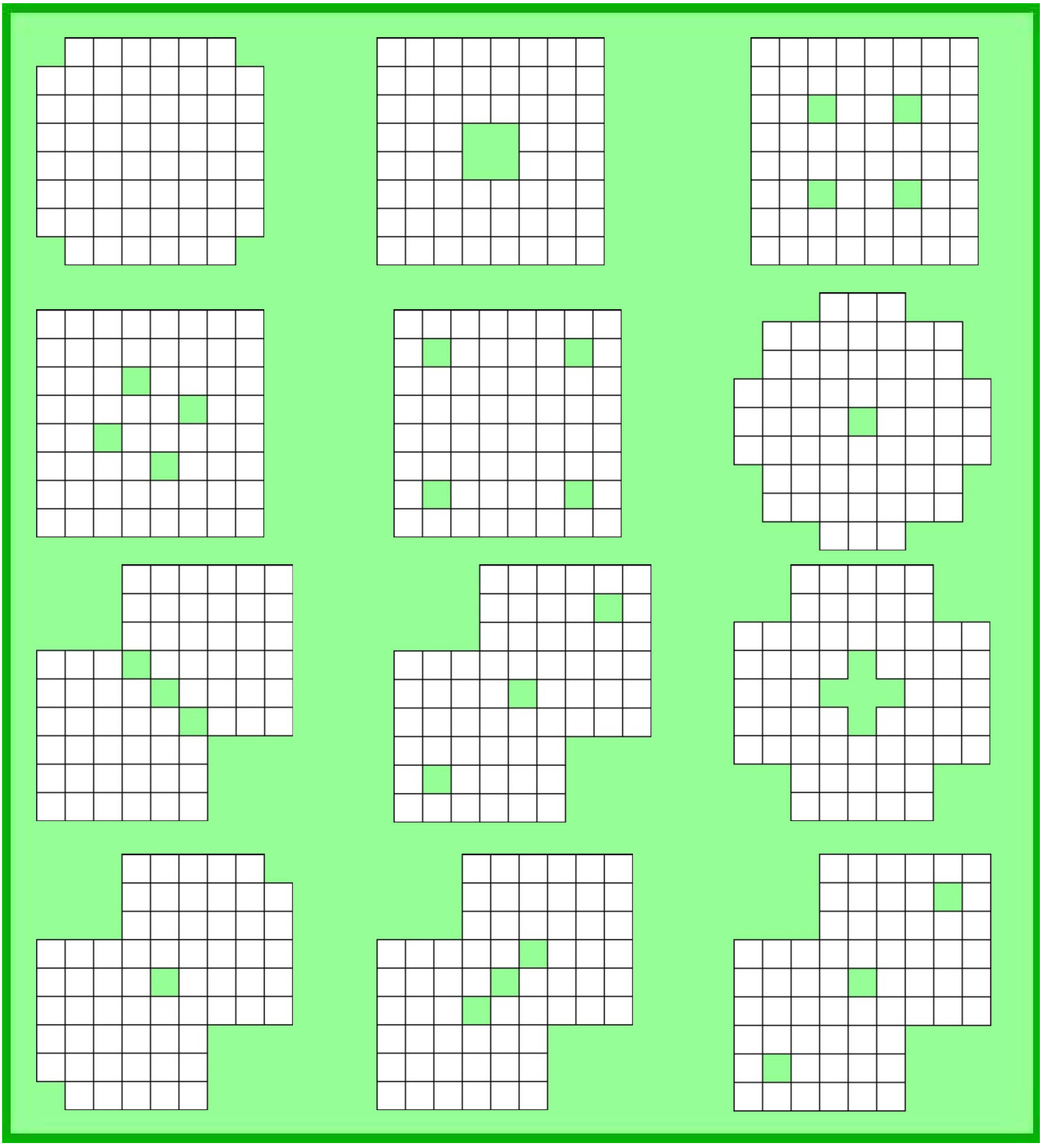


а). Возможно ли отыскать более изящное и симметричное расположение всех пяти отверстий в фигуре на рисунке справа?

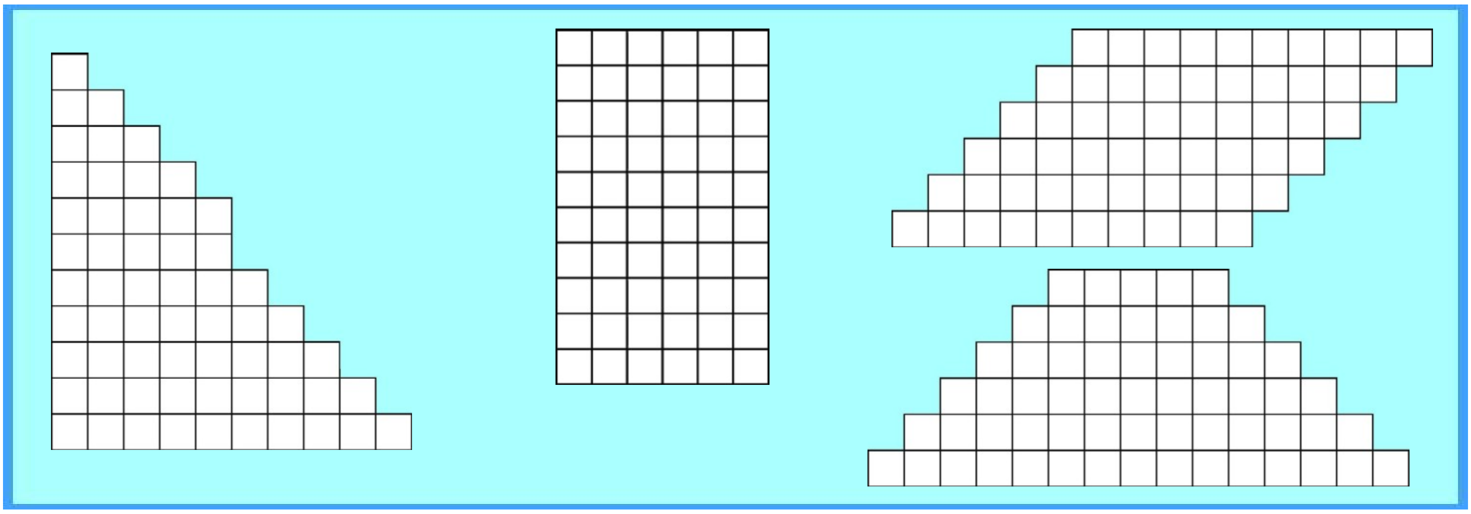


б). Возможно ли центральное отверстие в данной фигуре расположить по центру?

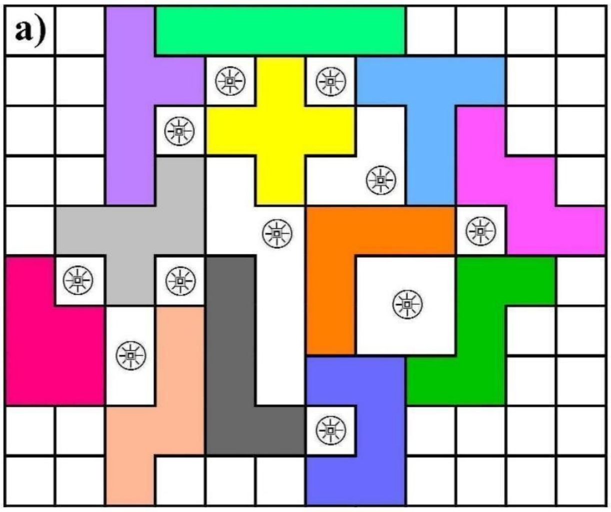
Внимательно поглядев на фигуры, вы заметите, что некоторые из них друг на друга очень похожи. Как вы видите на рисунках, простой квадрат 8х8 с 4-мя отверстиями таит в себе много интересного (его симметрия, например, способы укладки…); и попробуйте проанализировать двойной квадрат 6х6?



Задачи 140-143. Эта фигура (слева) сложена таким образом, что она легко трансформируется в пирамиду, прямоугольник 6х10 и параллелограмм 6х10. Проверьте?



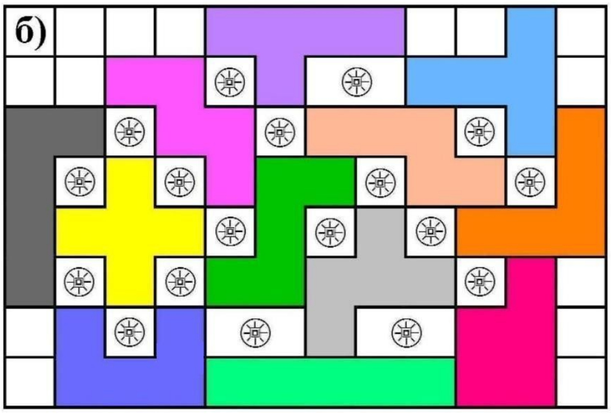
Задача 144. Из 12 стандартных элементов игры «**Пентамино**» постройте любую фигуру на любой площади с наибольшим количеством дыр в ней. Касание угловой точкой разбивает данную дыру в месте касания.

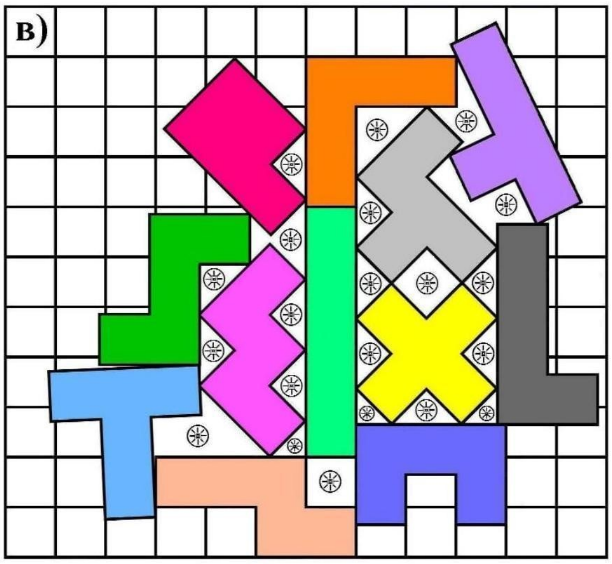


а) фигура состоит из 11 отмеченных точками (⊛) дыр (стандартная разбивка).

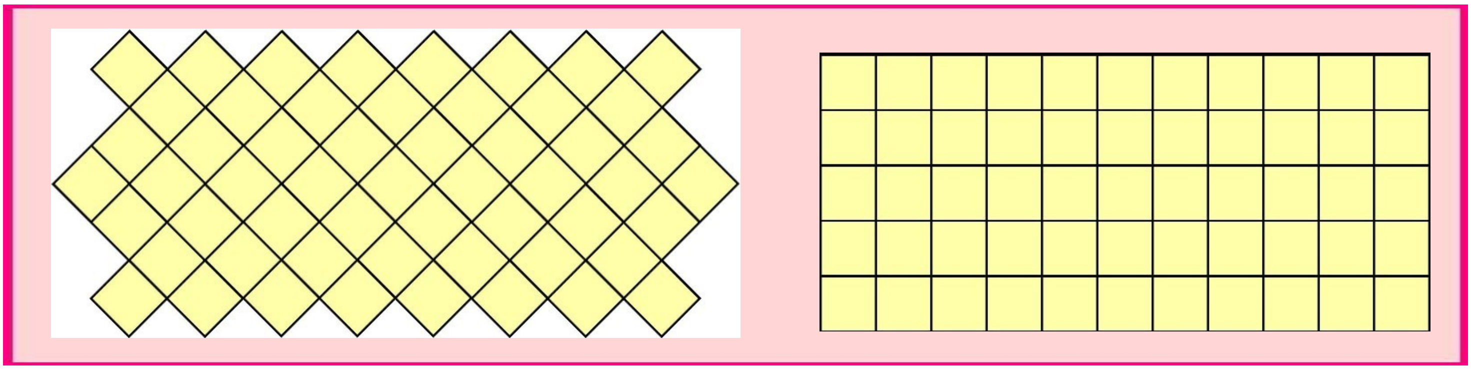
б) фигура, предложенная Ириной Драгуновой с 18 пустотами, на прямоугольном поле 8 х 12 по схеме стандартной разбивки.

в) примером неординарного подхода к решению задач может служить косоугольное решение данной задачи, предложенное Ю. Зелинским (21 дыра).



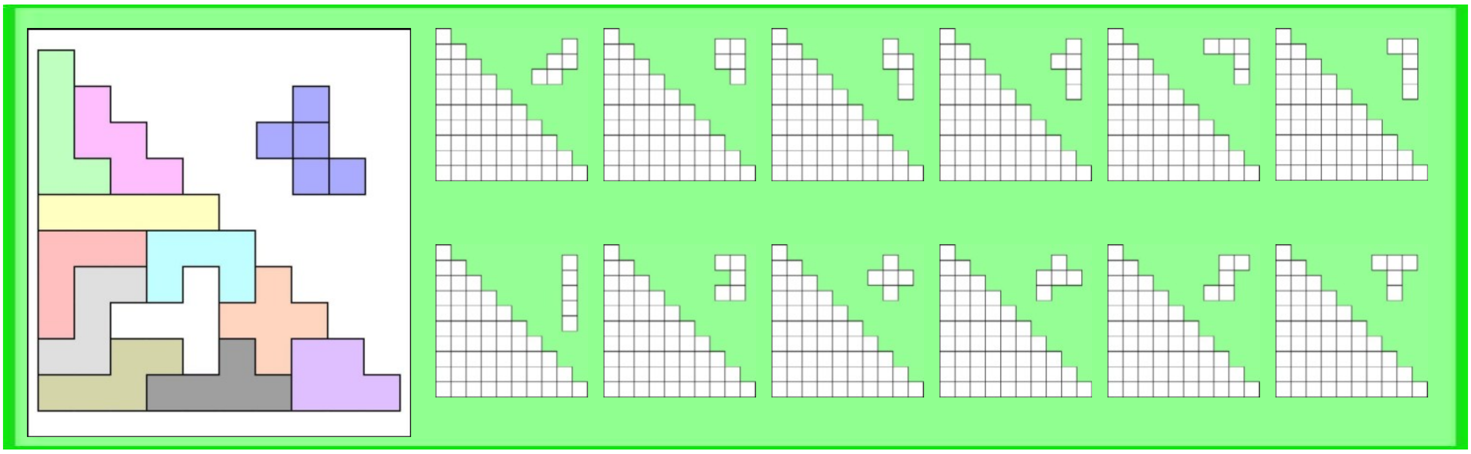


Задачи 145-146. Для построения этих фигур используется 11 элементов игры-головоломки «**Пентамино**», двенадцатый игровой элемент головоломки остаётся за бортом. Сколько решений к каждой фигуре вы найдёте?



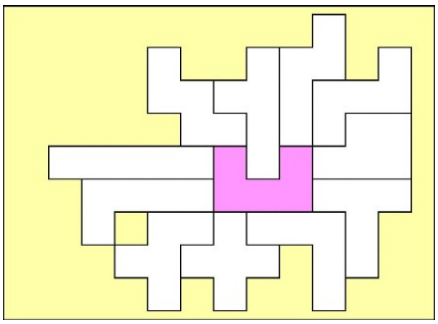
Задачи 147-158. Из 11 элементов игры «**Пентамино**» можно сложить фигуру (лесёнка). Двенадцатый элемент остаётся за бортом.

Сколько решений к каждой фигуре вы сумеете найти?

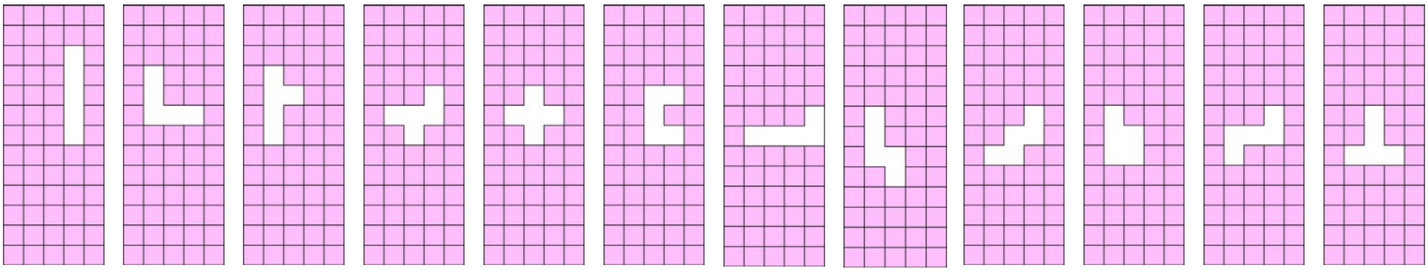


Задача 159. Вокруг любого элемента игры-головоломки «**Пентамино**» довольно легко можно расположить 11 элементов так, чтобы они имели с ним хотя бы одну точку соприкосновения (смотрите рисунок).

Можно ли расположить все одиннадцать элементов вокруг двенадцатого так, чтобы каждый из одиннадцати элементов соприкасался хотя бы одной гранью (стороной) с двенадцатым элементом игры-головоломки «**Пентамино**»?

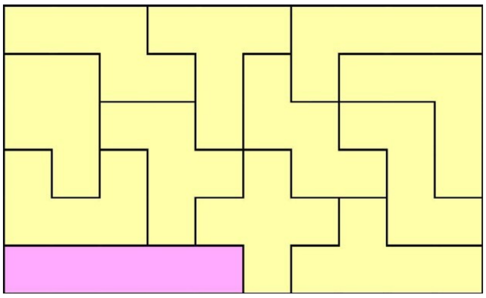


Задачи 160-171. Из двенадцати элементов игры сложите прямоугольник 5x13 таким образом, чтобы внутри прямоугольника (центральной части) образовался силуэт одного из 12 элементов игры «**Пентамино**» (поочерёдно).

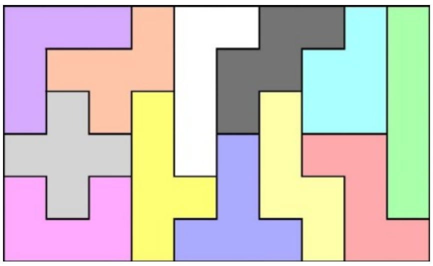


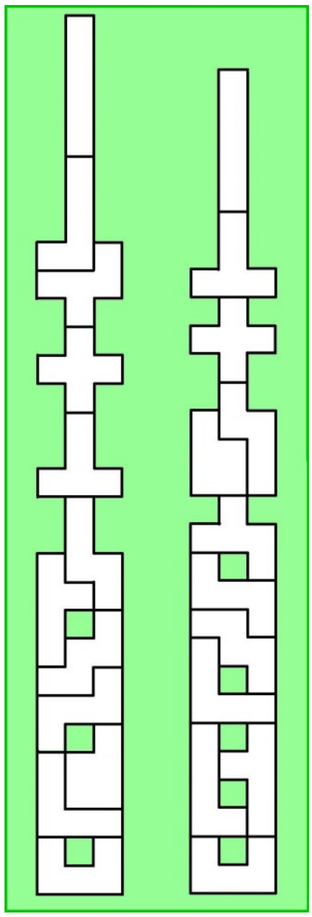
Задача 172. Постройте прямоугольник 6x10 таким образом, чтобы элемент № 12 (полоса) не выходил на границу прямоугольника.

Сколько существует вариантов постройки?



Задача 173. Попробуйте сложить прямоугольник 6x10 таким образом, чтобы каждый элемент хотя бы одной стороной выходил на границу прямоугольника.





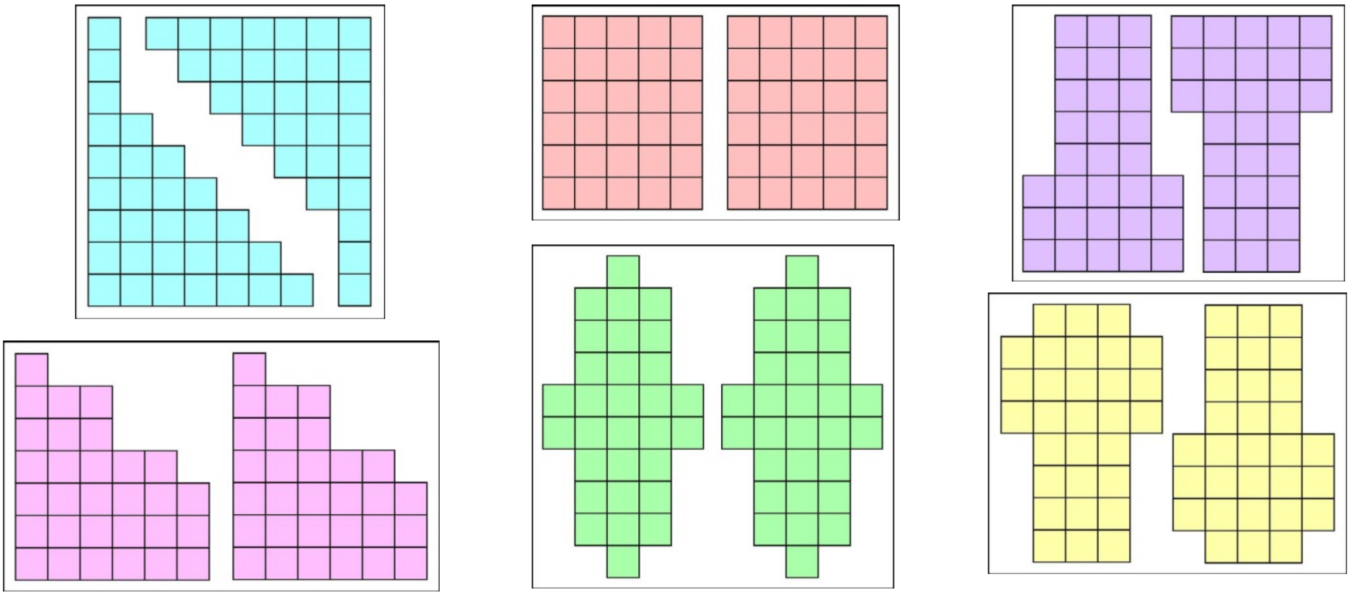
Задача 174-176. Перед вами пример построения симметричных классических башен из 12 элементов головоломки «**Пентамино**» высотой в 29 и 31 единицу (клетку, квадратик). Число окон и их расположение по высоте башни может быть выбрано произвольно.

Попробуйте сами сложить башню высотой в 32 единицы (клетку, квадратик).

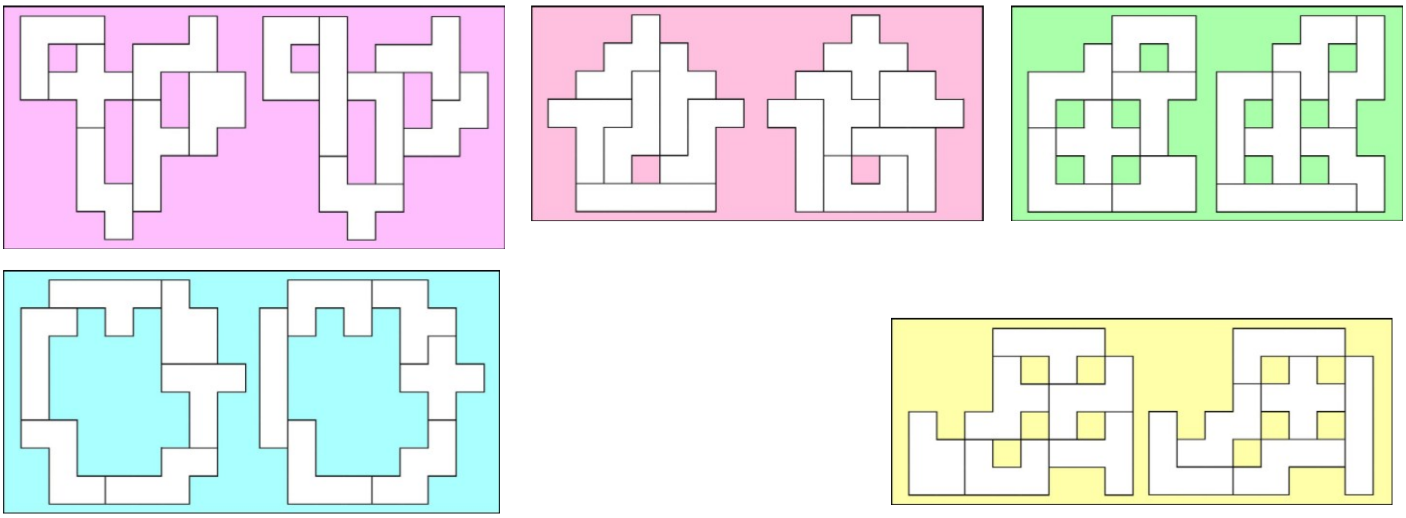
Будет ли это произведение (конструкция) – башней максимальной высоты?

Задачи **177-189.** В геометрии существует понятие конгруэнтности (соответствующий, совпадающий, соразмерный).

Говорят что две фигуры или две части фигуры конгруэнтны, если их можно совместить, наложив одну на другую так, чтобы они совпали; или одна из них может быть переведена в другую при помощи движения. В приведённых далее примерах-задачах конгруэнтность уже задана: надо просто сложить по две одинаковые фигуры (используя все 12 элементов **пентамино**).



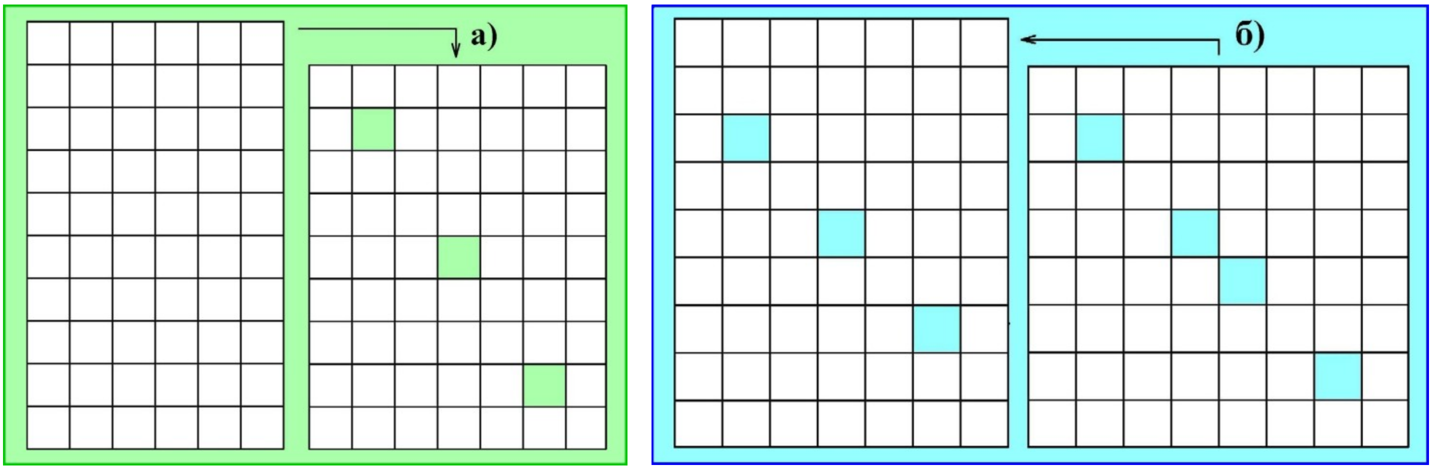
Для наглядности составления конгруэнтных пар приводим вам несколько классических примеров, которые вошли в мировую литературу.



Попробуйте, проявив немного фантазии, составить (свои) пары конгруэнтных фигур, взяв за основу выше изложенный материал. Ведь можно (да и нужно) не только уметь хорошо и быстро решать заданные головоломки-задачи, но и составлять свои, а также проводить их более-менее полный анализ.

Решать задачи с уже готовой конфигурацией фигур «парные фигуры» - это одно, а попробовать самим разбить какую-либо фигуру – это другое.

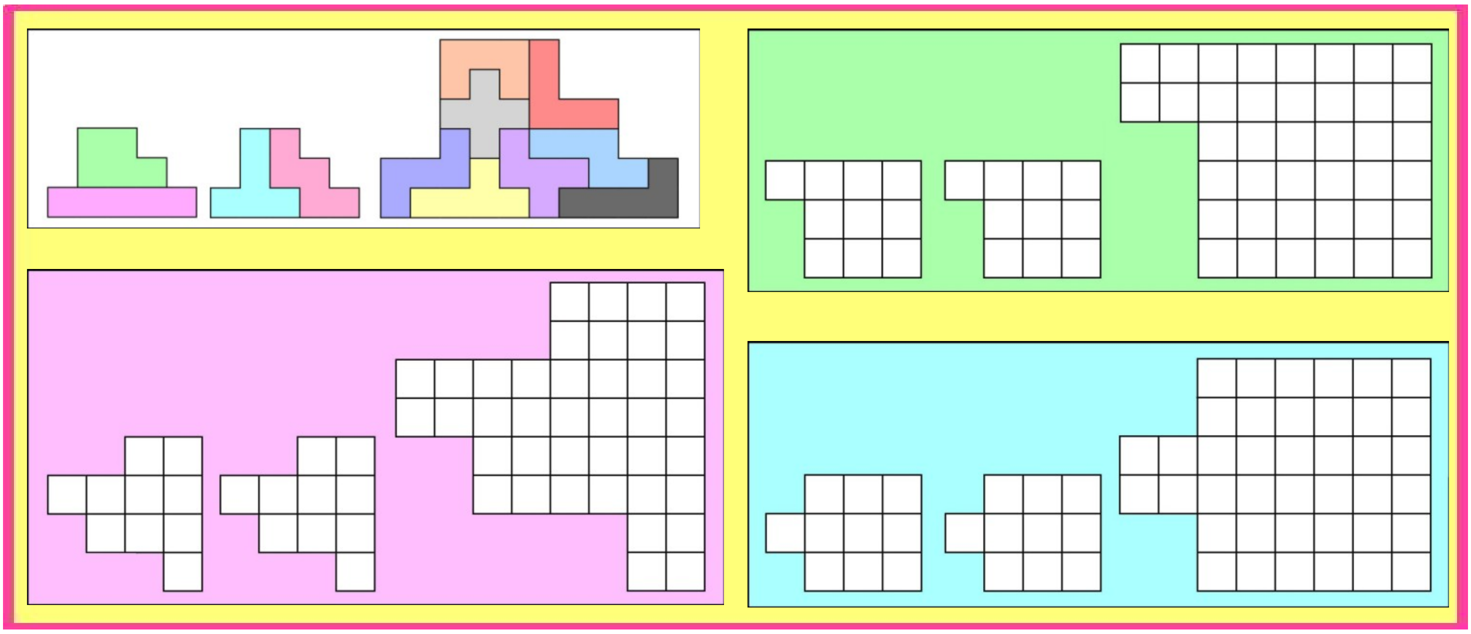
Сложите: **а**) «прямоугольник 6х10» и **б**) «квадрат 8х8» таким образом, что бы, разбив каждую фигуру на две конгруэнтные части, путём простого сдвига этих пар частей, их можно было превратить в прямоугольник 7х9 с тремя отверстиями.



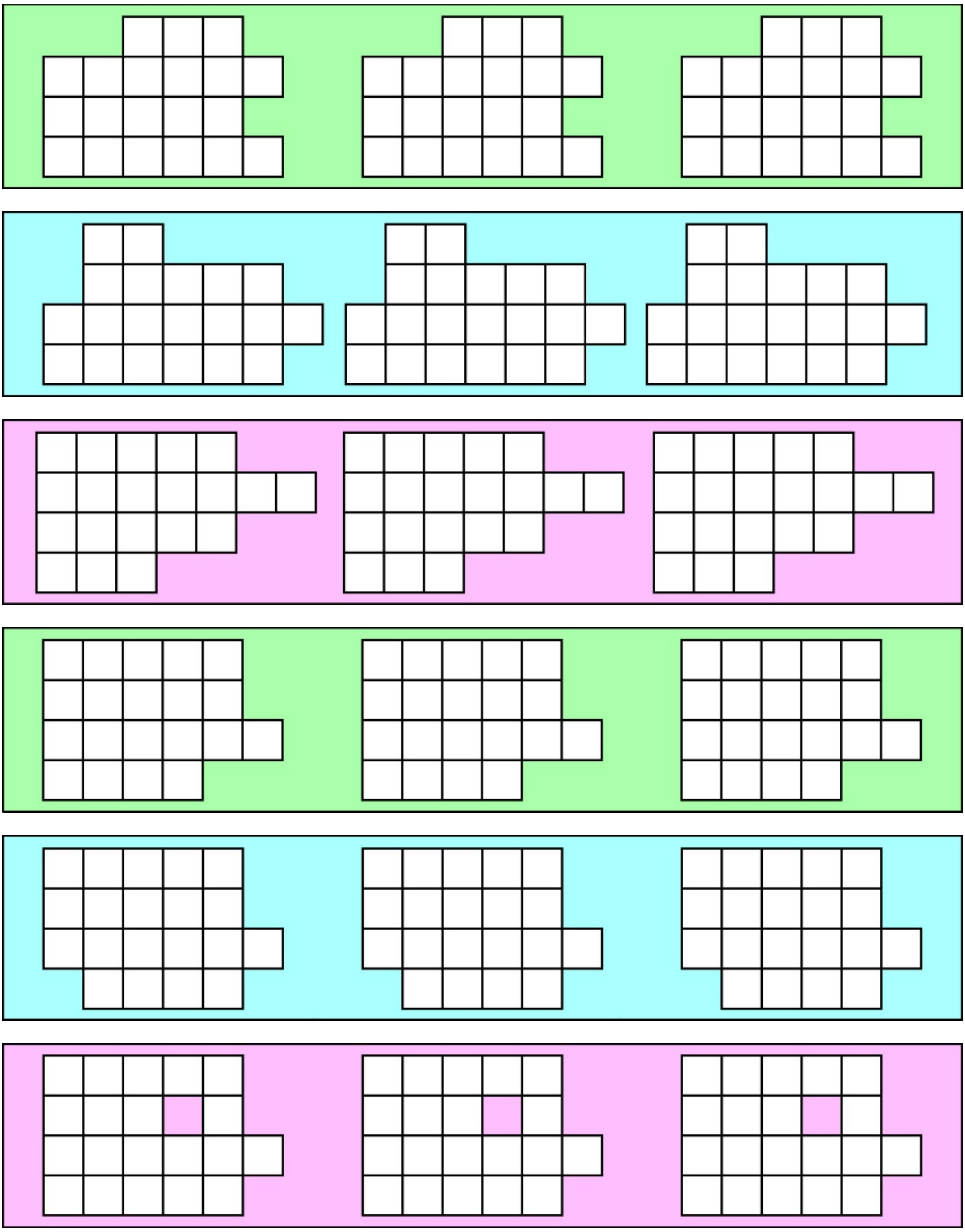
Задачи **190-193.** **Э**ти задачи известны как «задачи удвоения». В них требуется сложить три фигуры (2+2+8) одинаковой конфигурации – две малые и одну большую.

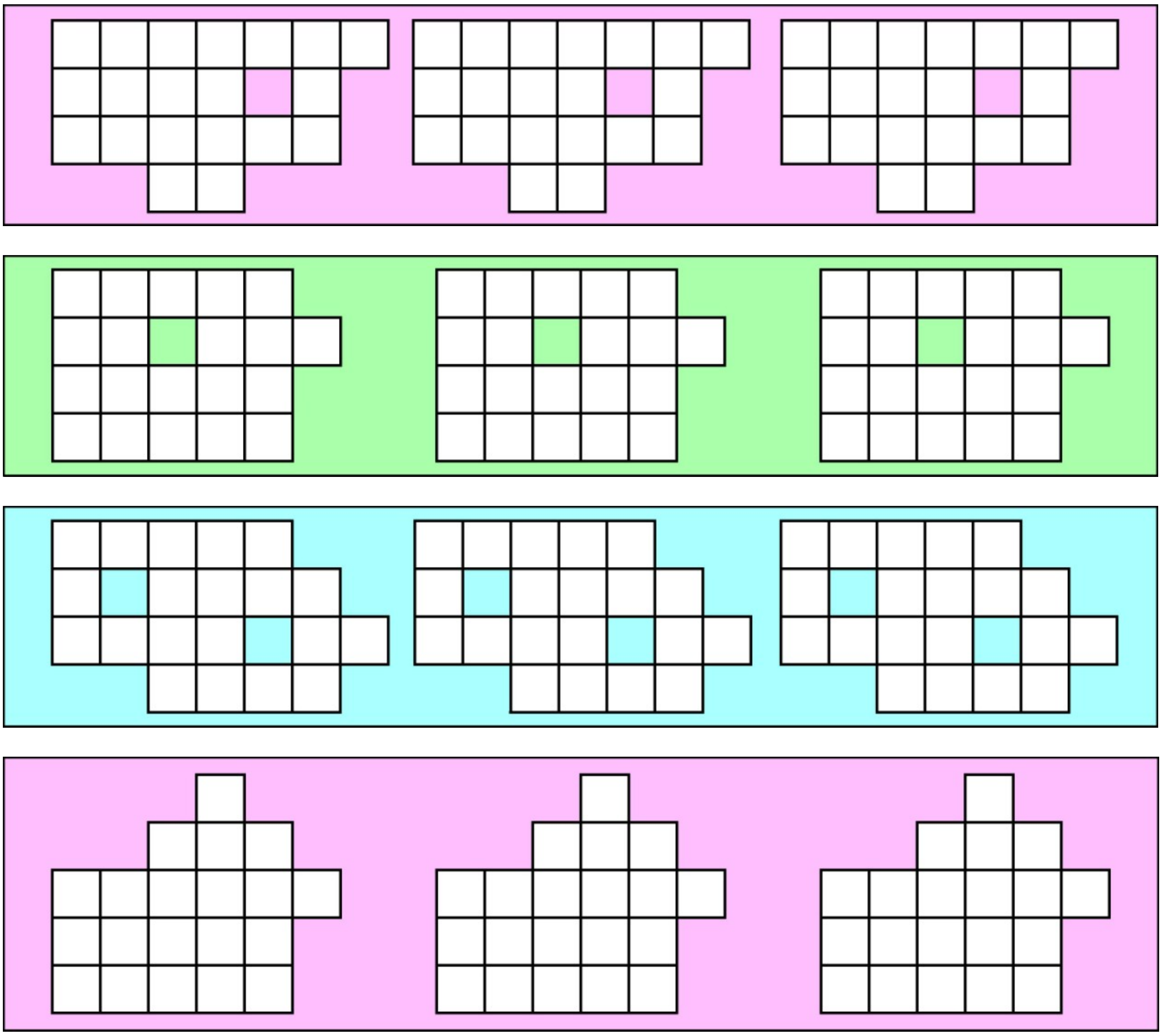
Соедините два любых элемента **пентамино** в «новую» фигуру. Из любых двух других элементов **пентамино** сложите «копию» этой фигуры. И используя оставшиеся восемь элементов **пентамино**, сложите ту же «форму», но увеличенную вдвое.

Ниже мы приводим вам пример на такое построения фигур и задачи.

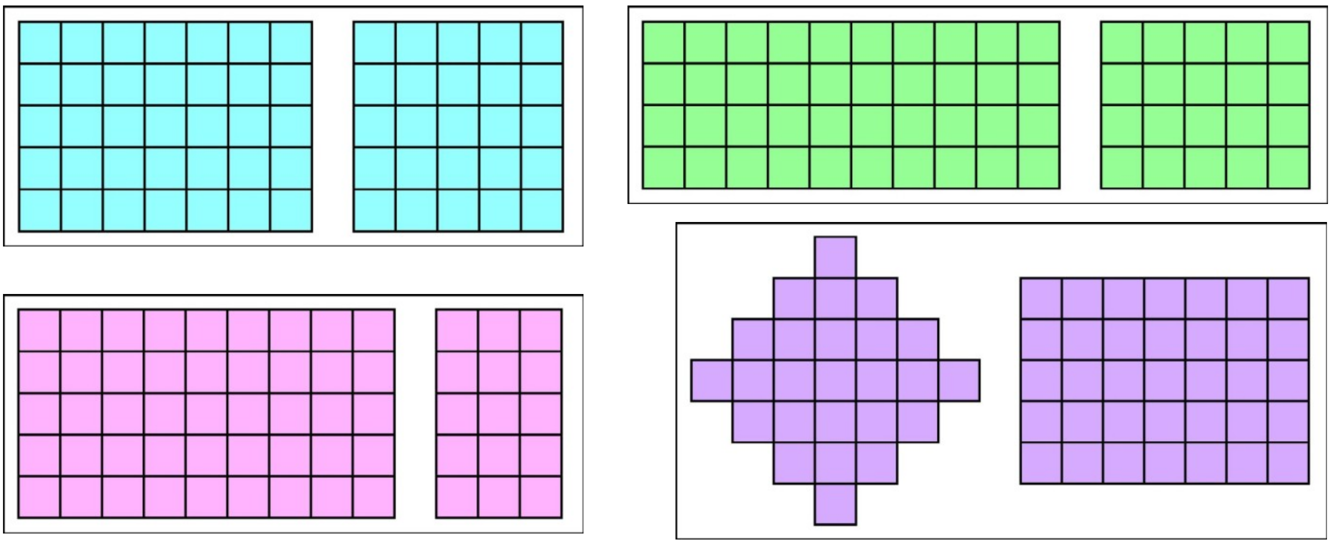


Задачи 194-203. Продолжая тему конгруэнтности фигур, перейдём к более сложным задачам – разбиению 12 элементов игры «**Пентамино**» на три группы по четыре элемента в каждой таким образом, чтобы из них можно было сложить три одинаковые фигуры. Наглядный пример сложности таких задач вы почувствуете, попробовав их решить и найти иные конфигурации.

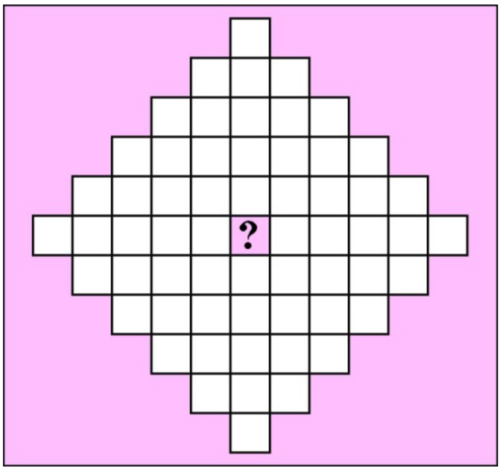




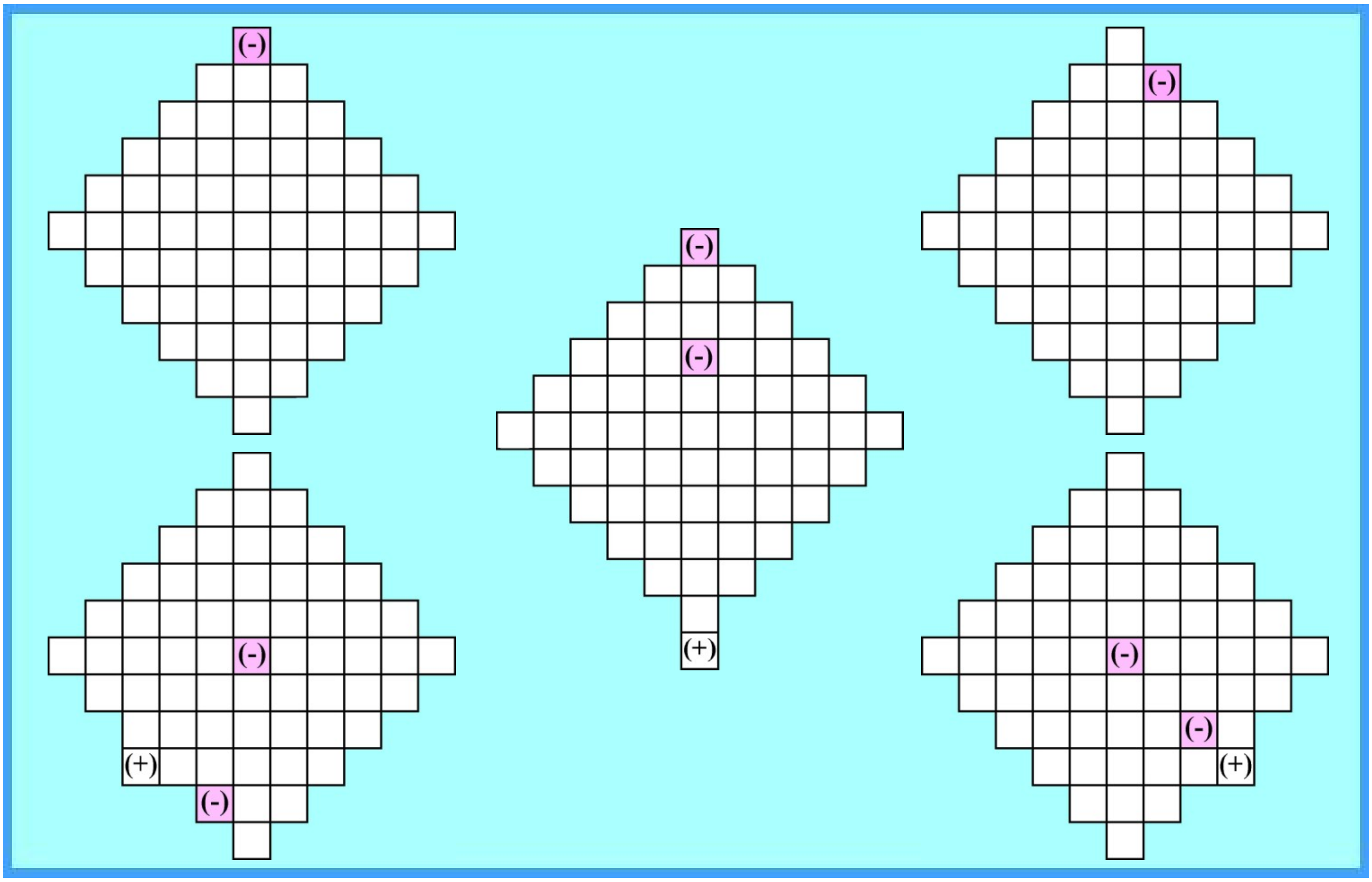
Задачи **204-207.** При составлении «двух фигур» из 12 элементов игры «**Пентамино**» получаются и не конгруэнтные фигуры и, не смотря на это, так же заслуживающие вашего внимания.



Задачи **208-213.** **Зубчатый квадрат.** Конфигурацию, приведённую на рисунке, невозможно построить не только с отверстием в центре, но и в любом другом месте внутри фигуры, хотя в ней и содержится ровно 60 клеточек (как раз столько, сколько содержат 12 элементов пентамино). Зубчатый квадрат – одна из ловушек для тех, кто пытается придумывать новые фигуры пентамино, начертив заранее понравившуюся 60-клеточную конфигурацию и пытаясь втиснуть в неё все 12 элементов игры-головоломки «**Пентамино**».



Это коварство фигуры «зубчатый квадрат» было обнаружено не сразу. Многое любители **пентамино** пытались построить его, в результате чего появились фигуры, в той или иной степени, приближающиеся к заданной конфигурации.

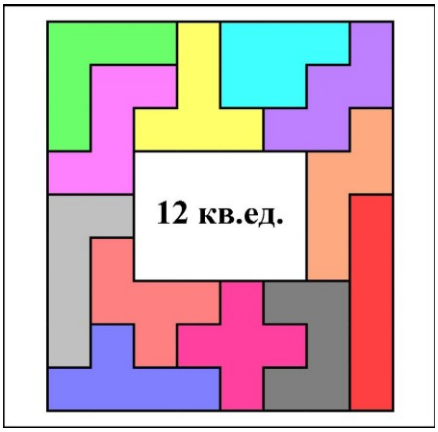


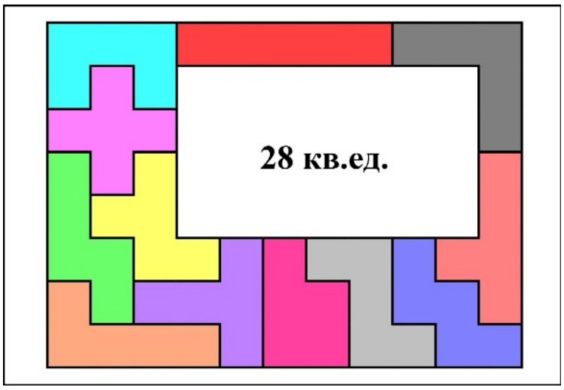
Р.М. Робинсон, профессор математики Калифорнийского университета в г. Беркли, вывел теоретическое доказательство невозможности решения «данной» задачи…. Ну а что скажет практика**?**

Задачи **214-221.** **Пентамино-фермы**. В. Февер из университета в Сен-Луи составил задачи о «**фермах пентамино**» ещё в 1968 году. Элементы **пентамино** можно расположить и компактно и так, что внутри фигуры остаются незаполненные площадки. Давайте условимся называть в этом случае замкнутую фигуру из элементов **пентамино**, ограничивающую это незаполненное пространство «забором», а всю фигуру «фермой».

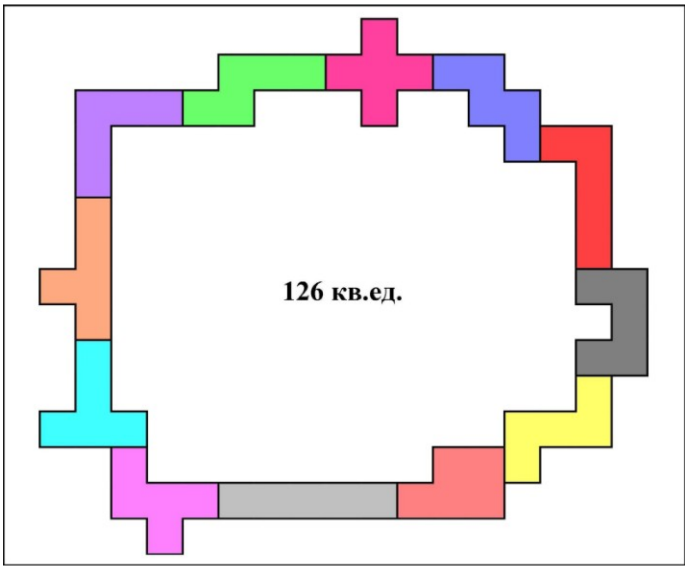
Спрашивается, какую максимальную площадь можно огородить, используя все 12 элементов игры «**Пентамино**» при условии:

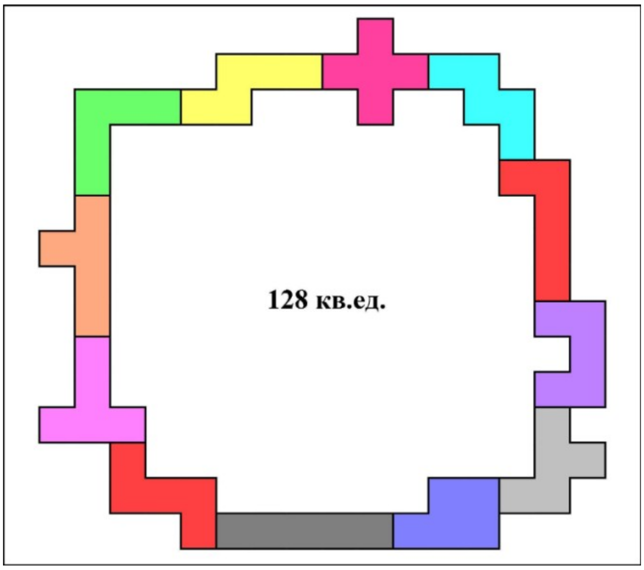
1. И наружный и внутренний контуры фигуры представляют собой контуры прямоугольников. Предлагаем вам два варианта решения. Найдите ещё!





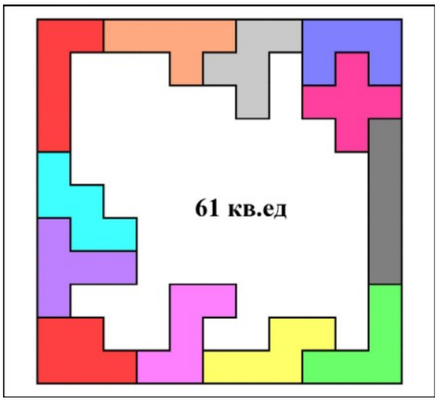
2. Конфигурация наружной линии забора и внутреннего дворика произвольна. Предлагаем вам только два варианта решения. Найдите ещё!





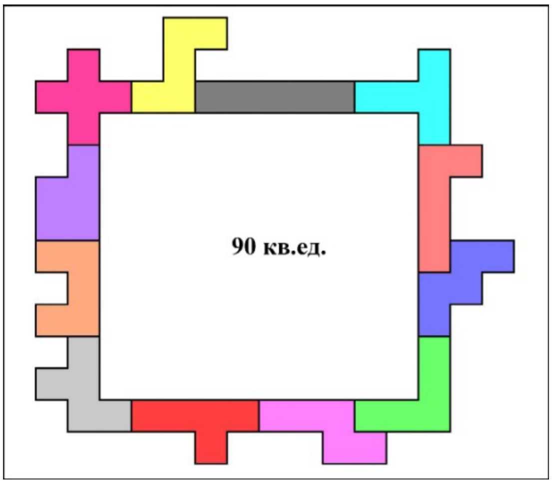
3. Контур наружной стены фермы в плане представляет собой стороны прямоугольника, а контур внутренней площадки (конфигурация) произвольной (неправильной) формы.

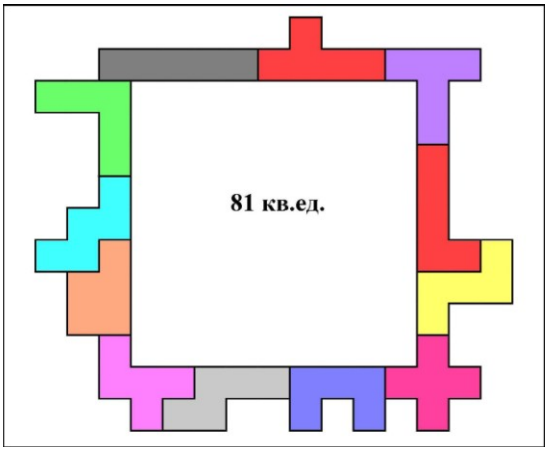
Попробуйте найти решение с наибольшей площадью дворика.



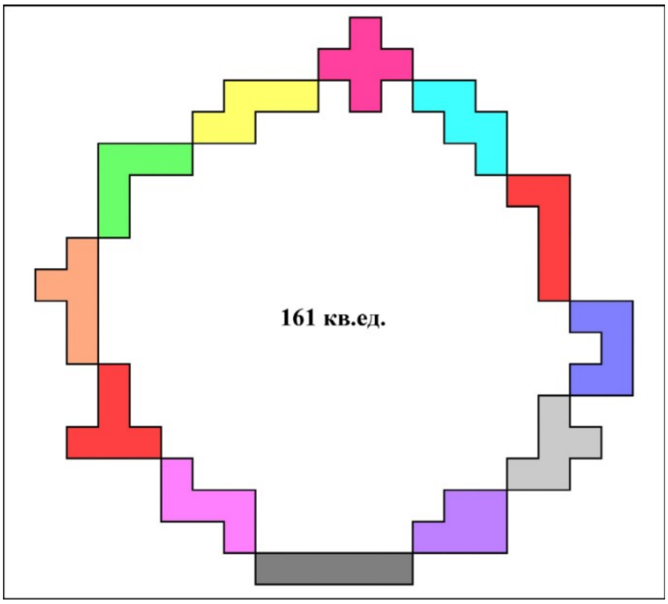
4. Внутренняя площадка фермы – прямоугольник, а наружная сторона забора неправильной формы (произвольная).

Предлагаем для сравнения два варианта решения задачи. Найдите ещё!





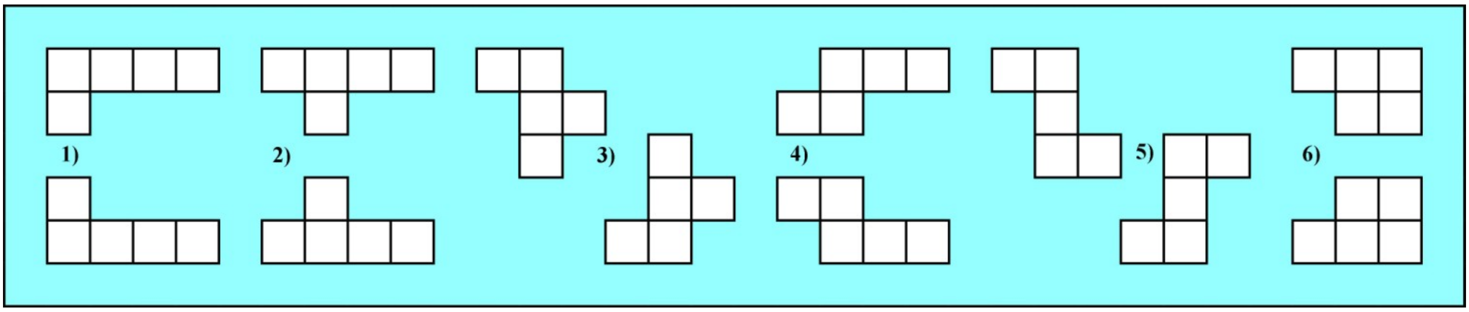
5. На сколько можно увеличить уже известную максимальную площадь, если, пренебрегая правилами построения пентамино (разрешить касание элементов пентамино в одной точке) попытаться построить ферму с наибольшей площадью дворика. Для наглядности построения приводим вам один рисунок.



18-ти ЭЛЕМЕНТНОЕ ОДНОСТОРОННЕЕ ПЕНТАМИНО

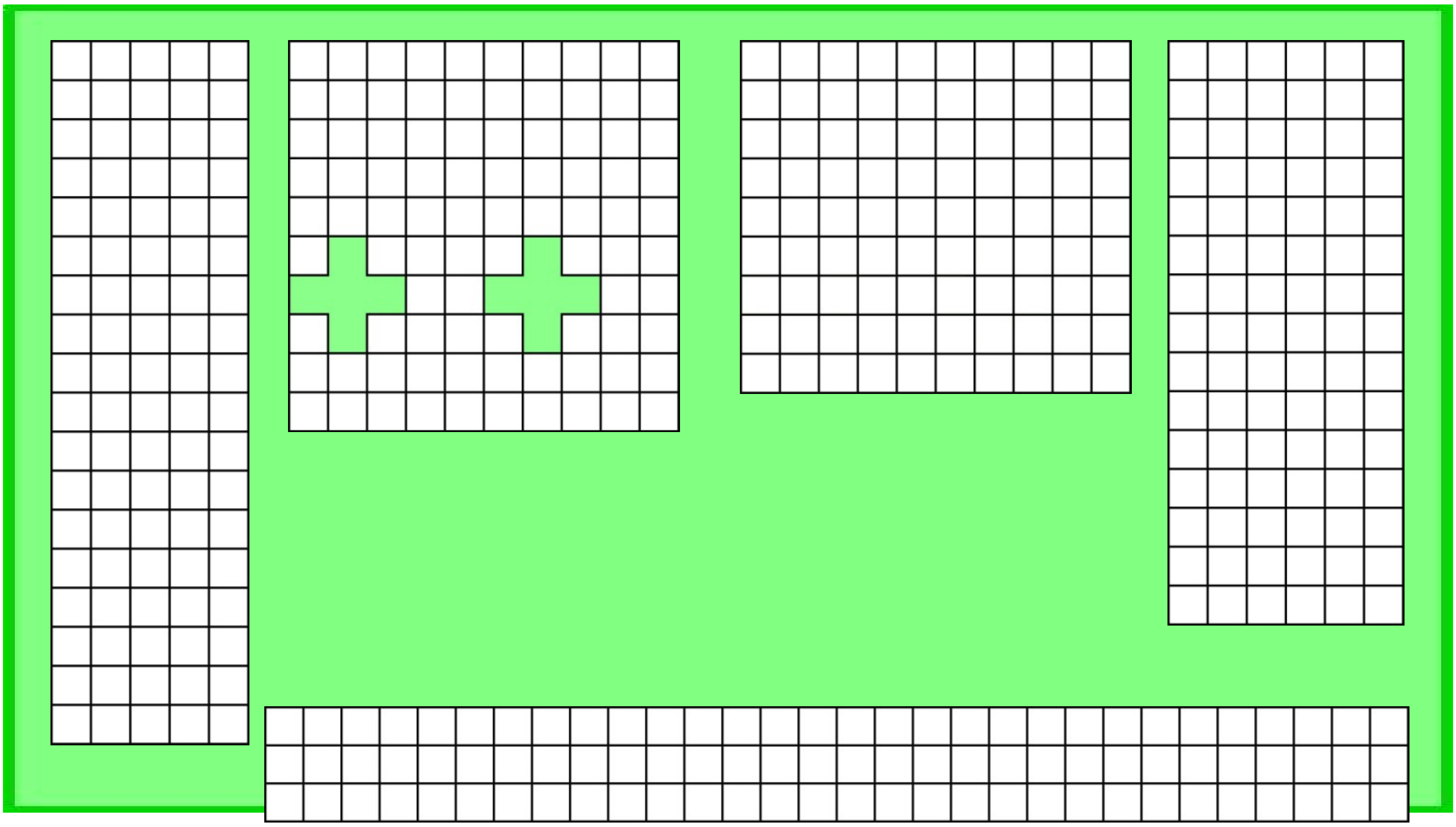
Добавим к 12 элементам пентамино **ещё шесть зеркальных (зеркальное отображение элементов с номерами от 1 до 6), мы получим игру «**18-ти элементное одностороннее пентамино»**.**

Как вы видите на рисунках, эти пары элементов очень похожи, но ни один элемент нельзя повернуть так, чтобы получился другой (одна фигура – отражение другой).



Задачи 222-226. **Соблюдая правила замощения фигур** 12-ти элементным пентамино**, попробуйте уложить фигуры** 18**-**ти элементного одностороннего пентамино **в прилагаемые вам для решения «конкретные фигуры».**

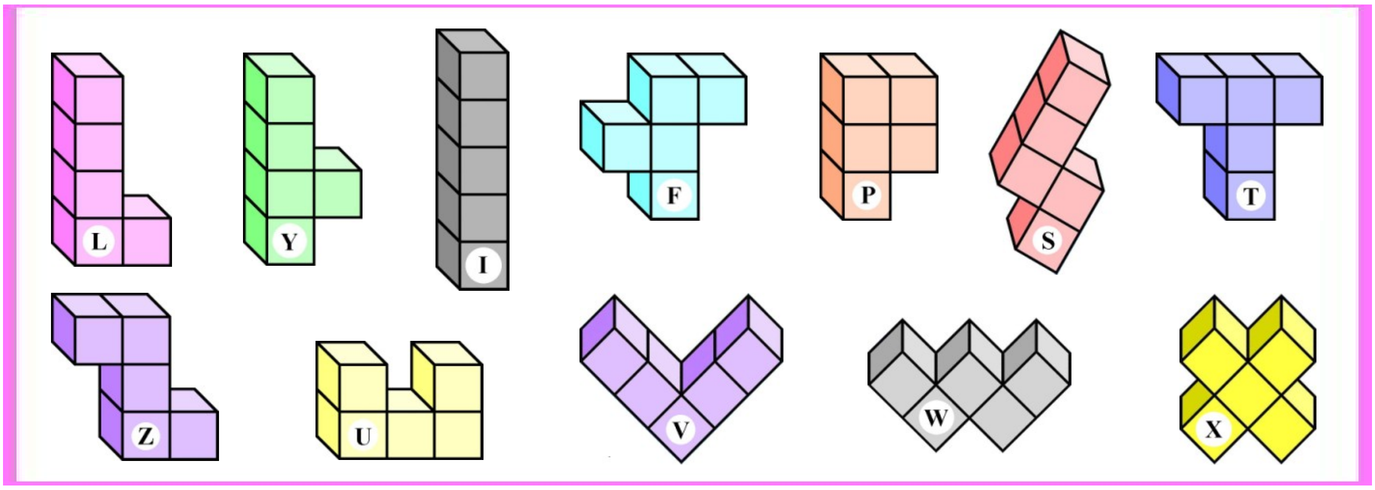
П**роявите фантазию, настойчивость и терпение и придумайте (составьте) сами какие-либо тематические фигуры (шахматы, транспорт, животный или подводный мир…).**



ПЕНТАКУБИКИ

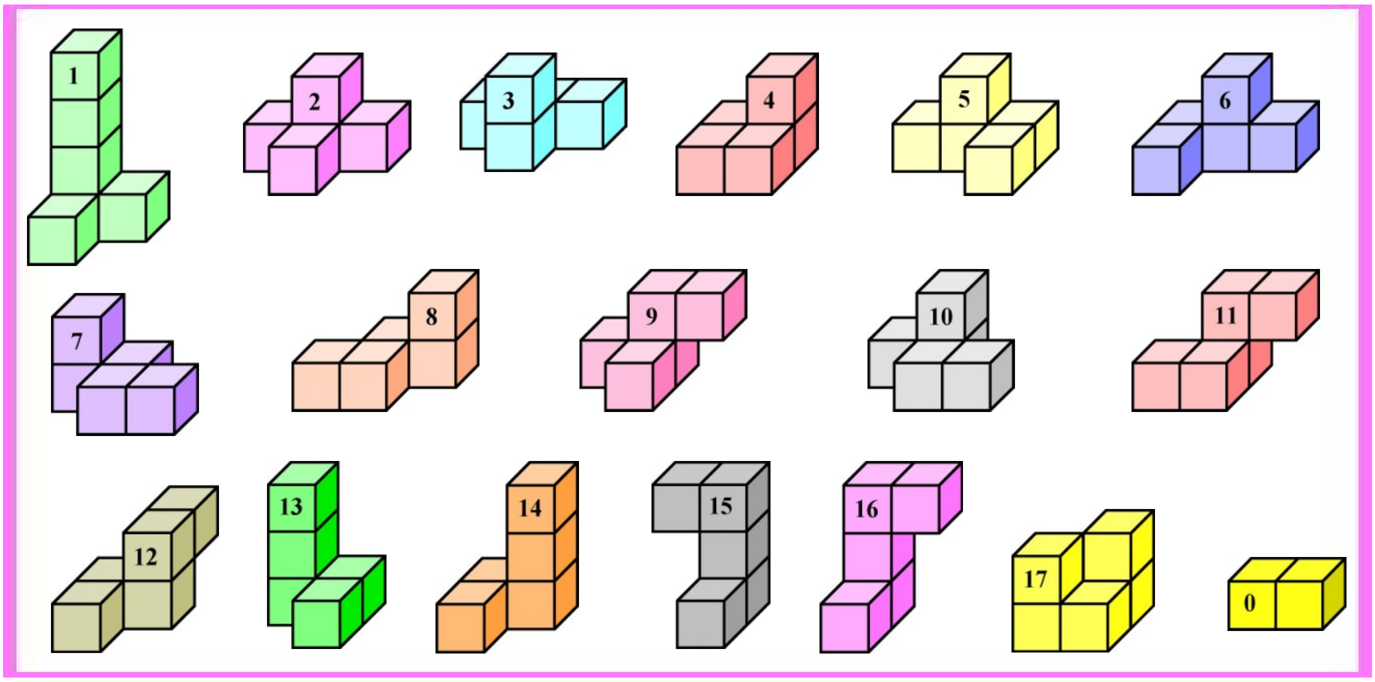
Автор головоломки «**Пентакубики**» Д. Клэрнер рассчитал все «**пространственные пентамино**» – фигуры из пяти кубиков, - из которых никакие две нельзя совместить движением в трёхмерном пространстве.

Получилось 29 фигур: 12 «плоских» **пентакубиков** – элементы уже знакомого вам объёмного **пентамино** (на эскизах мы показываем вам все 12 элементов и их буквенные обозначения), а так же 17 пространственных элементов (на эскизах показаны все 17-ть элементов и их цифровое обозначение).



Число «29» - не слишком удобное, кубиков получается 145 (29х5=145). Если использовать их все, то простую фигуру просто не составить. Поэтому Д. Клэрнер для головоломки оставил 28 фигур (28х5=140 кубиков). С ними уже можно работать. Фигуру «1х1х5» – Д. Клернер изъял из комплекта.

Пробка «1х1х2» используется при построении фигур из **пентакубиков**.

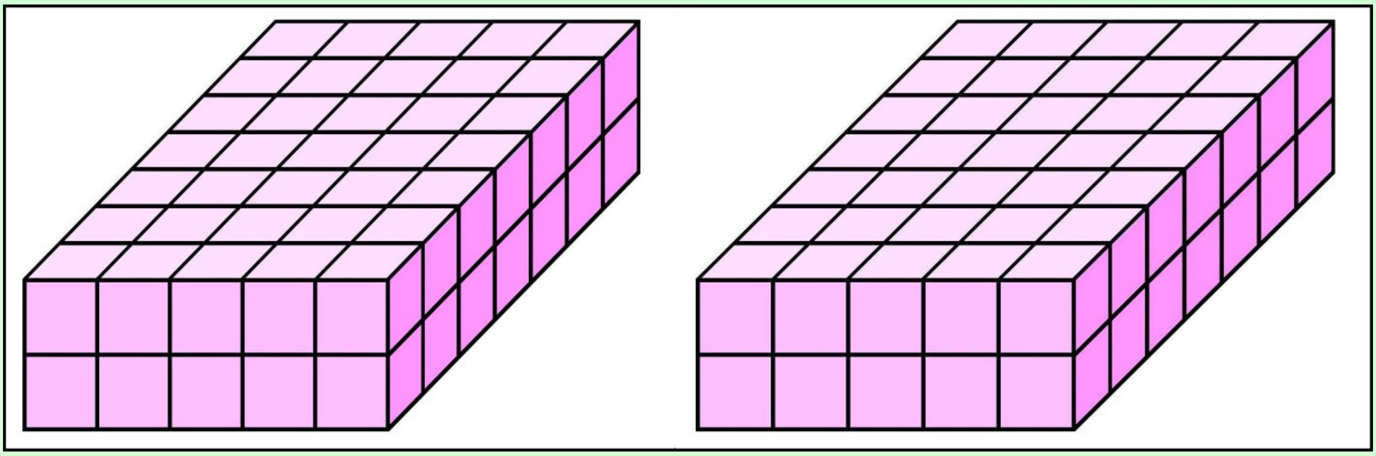


Головоломка «**Пентакубики**» со всеми её 28 элементами показывает нам одну закономерность: чем больше деталей в игре-головоломке, тем менее она интересна как игра. В головоломках «**Кубики для всех**» и «**Танграм**» всего по семь деталей, между тем они позволяют придумать множество простых задач (решить которые не так просто) и зарисовать решение.

Чем больше деталей, тем труднее отметить их в сложенной фигуре, удовольствие становится проблематичным, а тренировка терпения – испытанием.

Тем не менее, попробуйте проверить свою сообразительность и геометрическое воображение, решив задачи на сложение простых фигур из чрезвычайно неудобных рогатых деталей головоломки, которые мы предлагаем вам далее и попробуйте составить свои задачи.

Задачи **227-230.** Уложите все **пентакубики** в коробочку «4х5х7» или разложите их по двум коробочкам «2х5х7» (исключив элемент 1х1х5).



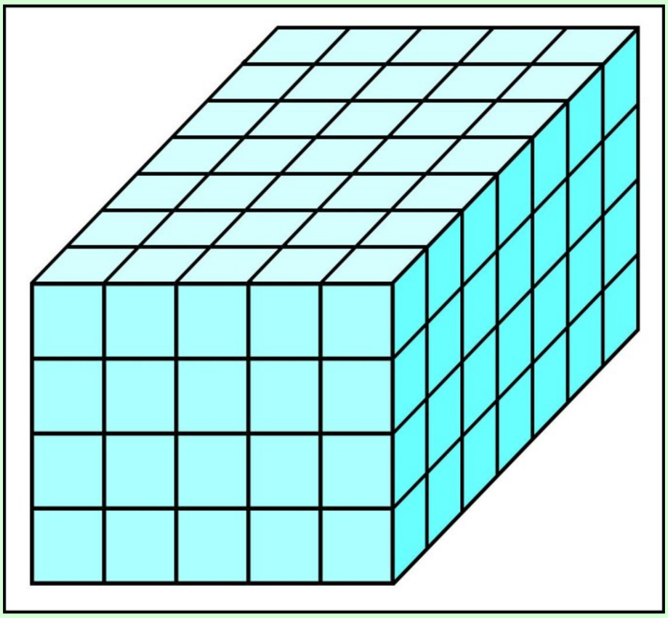


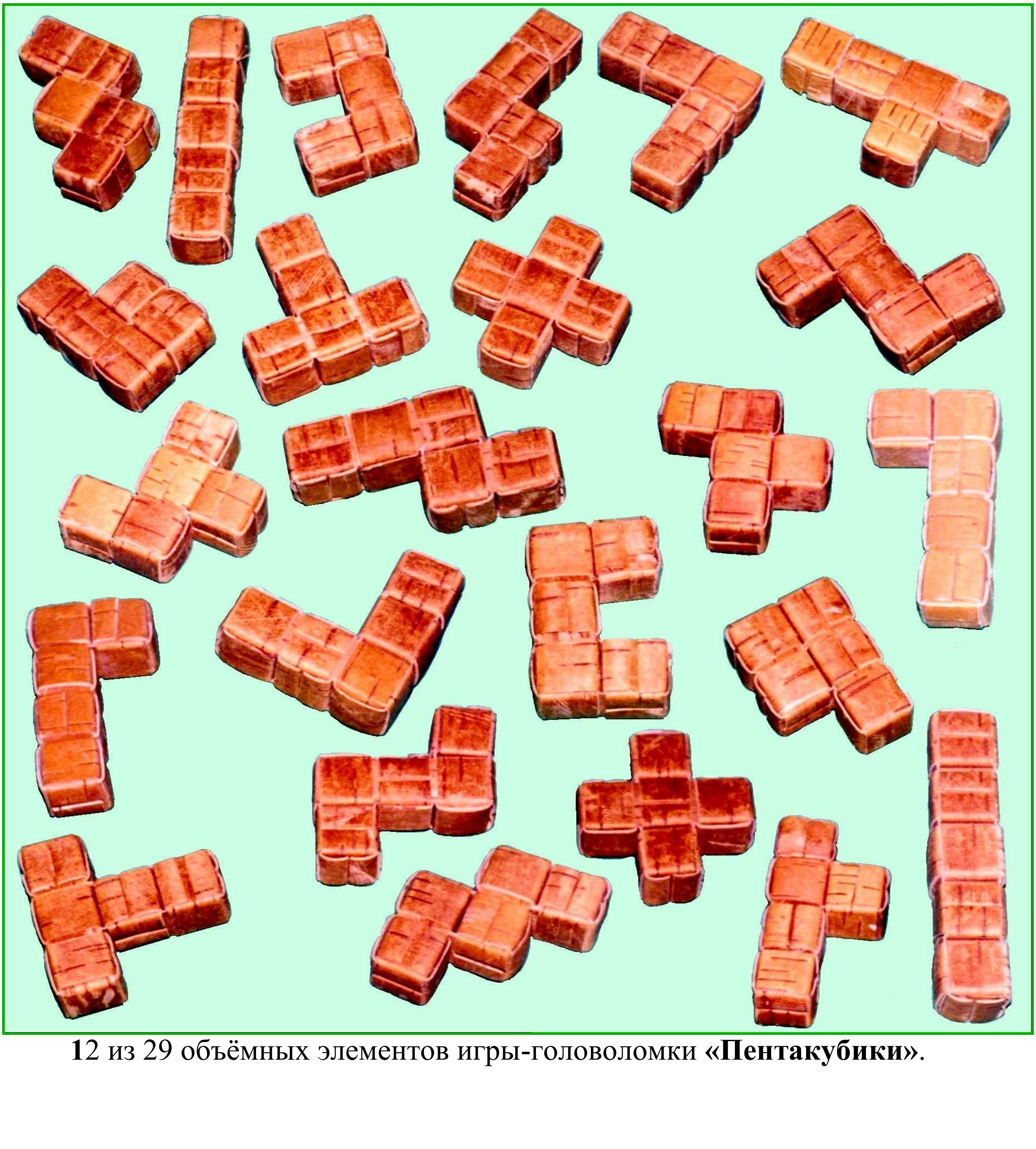
ТАБЛИЦА ПРИСТАВОК

Приставки принятых количественных наименований (граней, сторон) применяемых в материалах о головоломках

1 * моно- 2 * ди- или би- 3 * три- 4 * тетра-	5 * пента- 6 * гекса- 7 * гепта-	8 * окта- 9 * эннеа-.., нона- 10 * дека- .., и так далее... .

ПЕНТАКУБИКИ (иллюстрация)

Наряду со стандартными элементами игры «**Пентакубики**», выпускаемыми промышленностью разных стран из пластика, умельцы из народа, сохраняя свои народные традиции и промыслы, изготавливают элементы **пентакубиков** кто из дерева, а кто из кости, кто и из коры берёзы, обработанной в кипящем масле, и т. д., о чём свидетельствует данная иллюстрация.

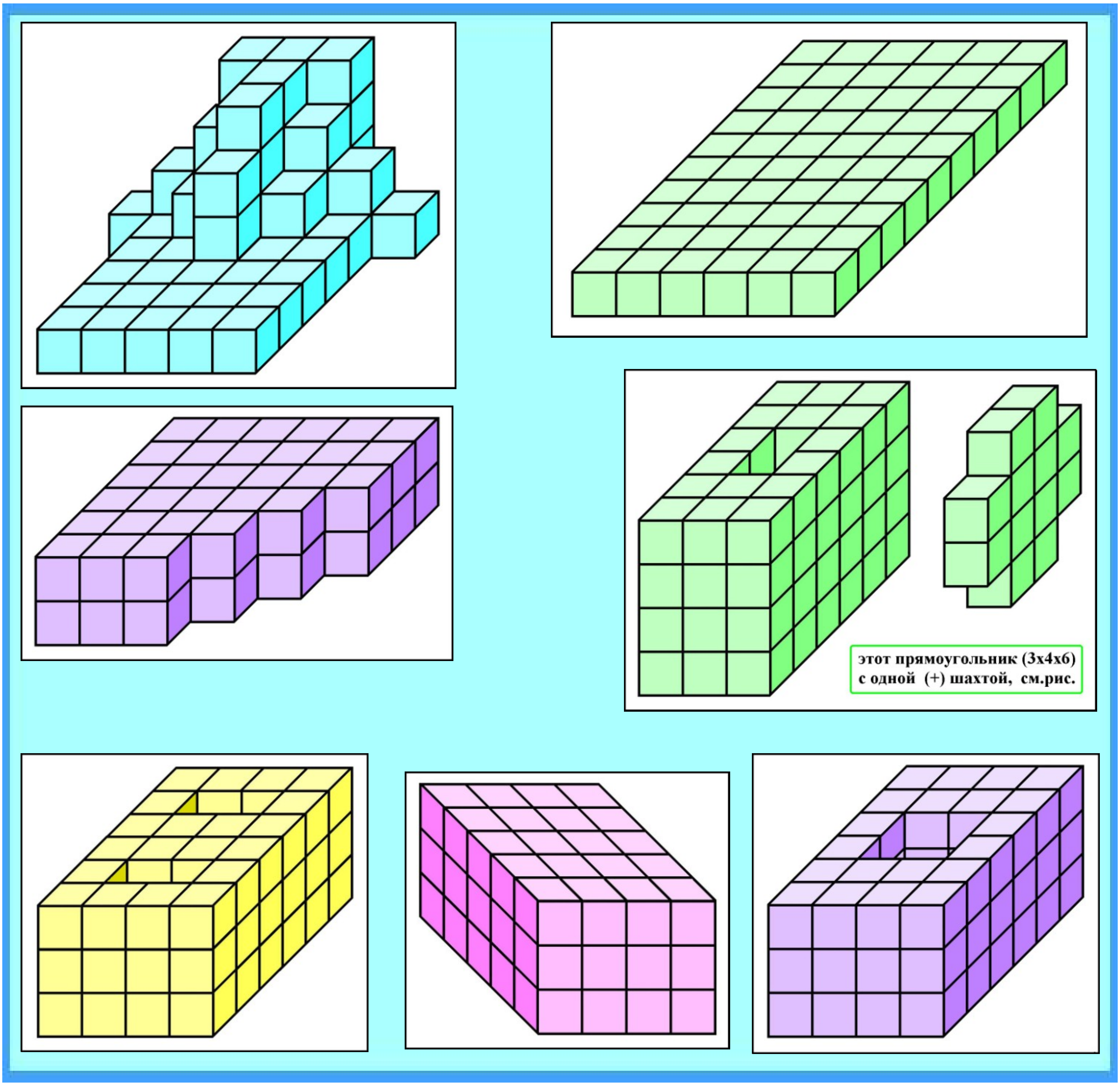


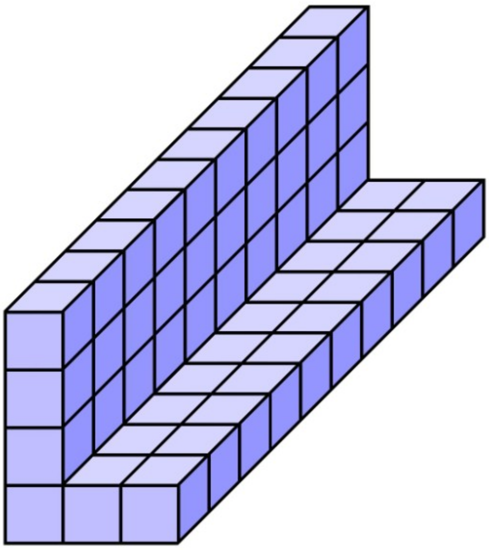
12 из 29 объёмных элементов игры-головоломки **«Пентакубики»**.

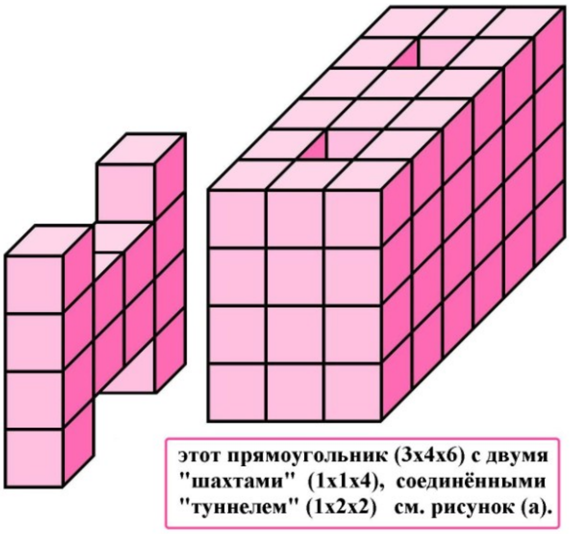
Мы же с вами не будем обременять себя столь сложными задачами, как составление или решение задач со всеми 28 элементами игры «**Пентакубики»**. Просто возьмём **12-ти элементное пентамино** (изготовим его из детских кубиков) и попробуем составлять и решать всевозможные фигуры (от простых прямоугольников до затейливых конфигураций).

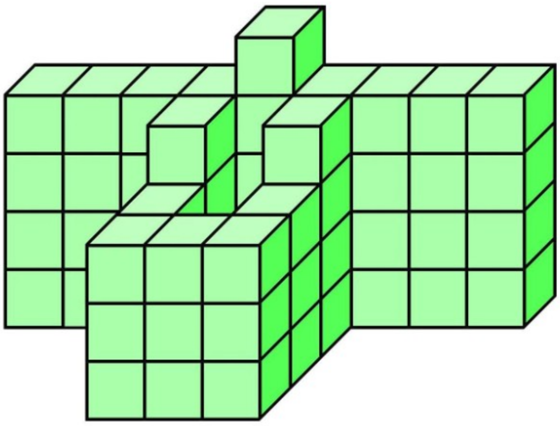
Во всех далее задачах так же ставится одно условие: при их решении в игре должны участвовать все 12 игровых элементов игры «**Пентакубики**».

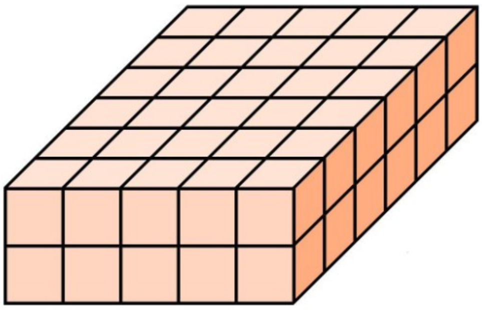
Задачи **231-250.**

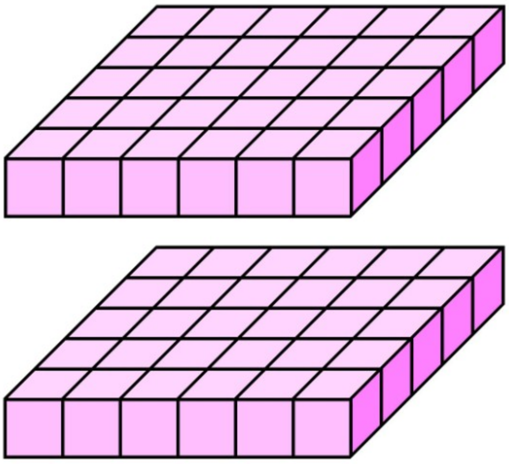


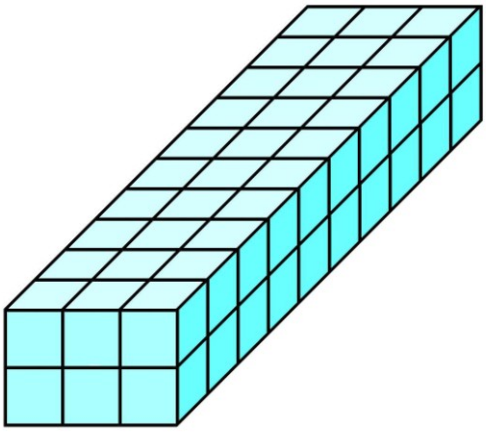


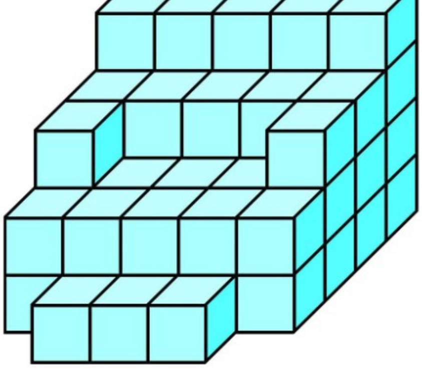

этот прямоугольник (3х4х6) с двумя
"шахтами" (1х1х4), соединёнными
"туннелем" (1х2х2) см. рисунок (а).

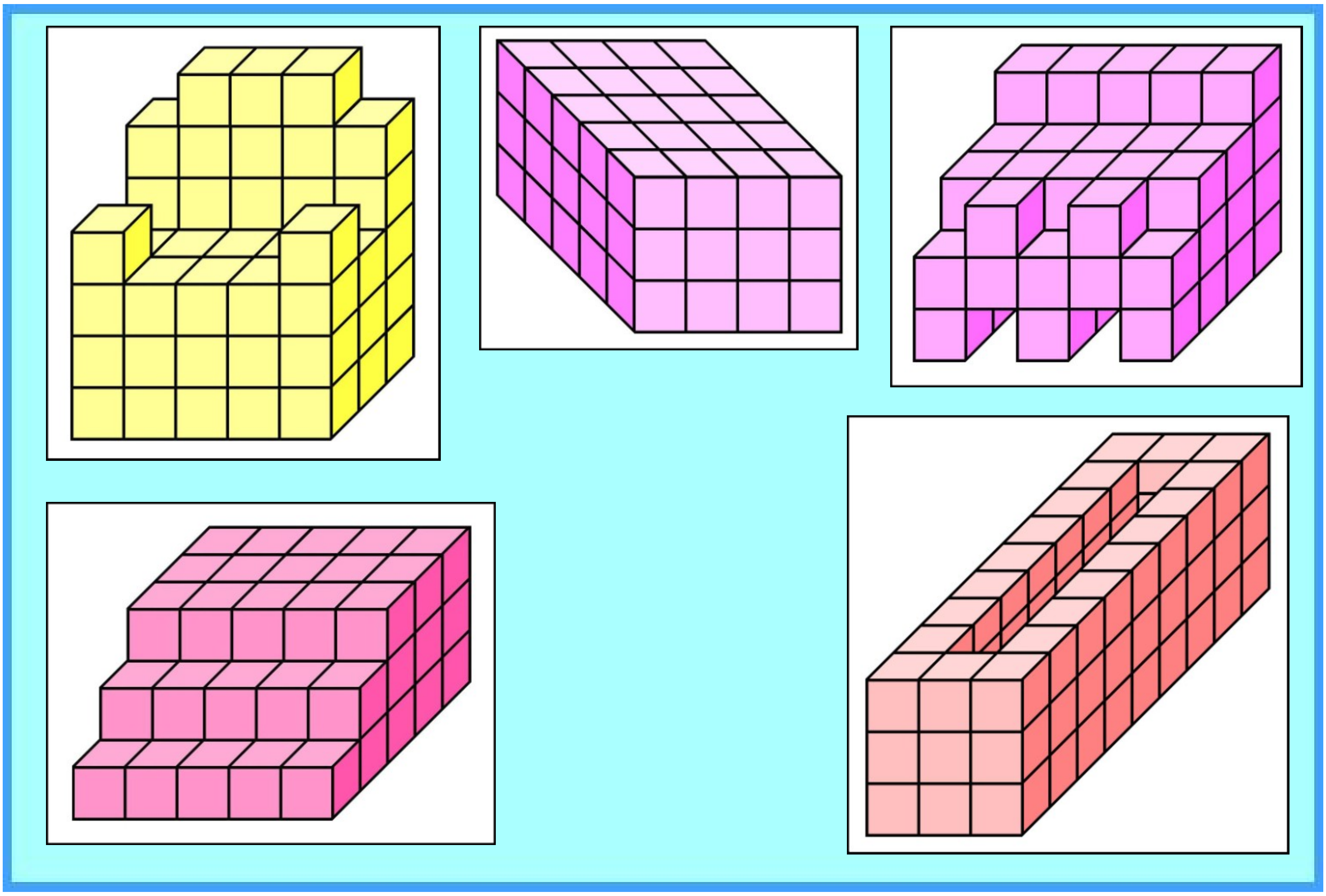




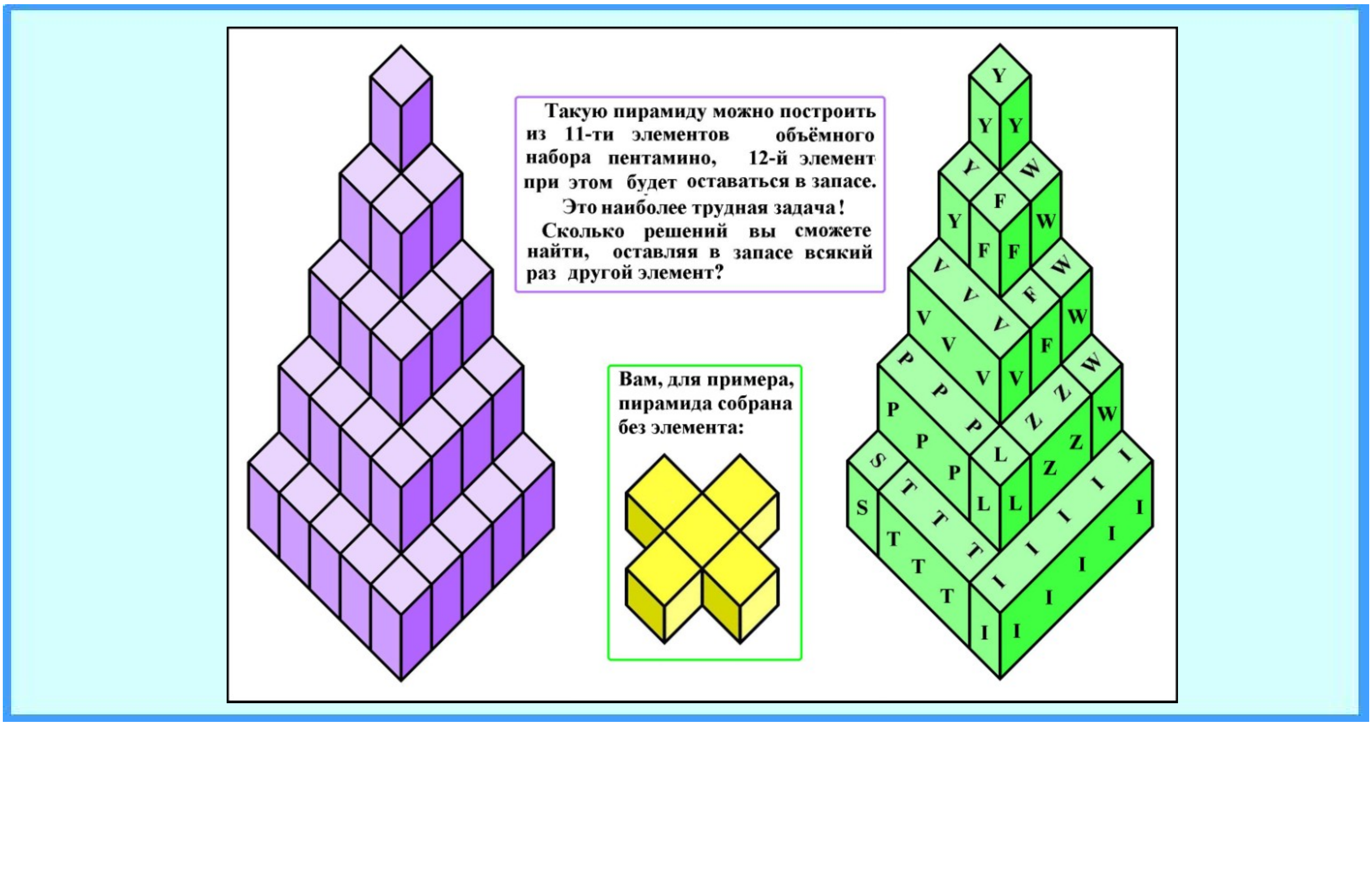


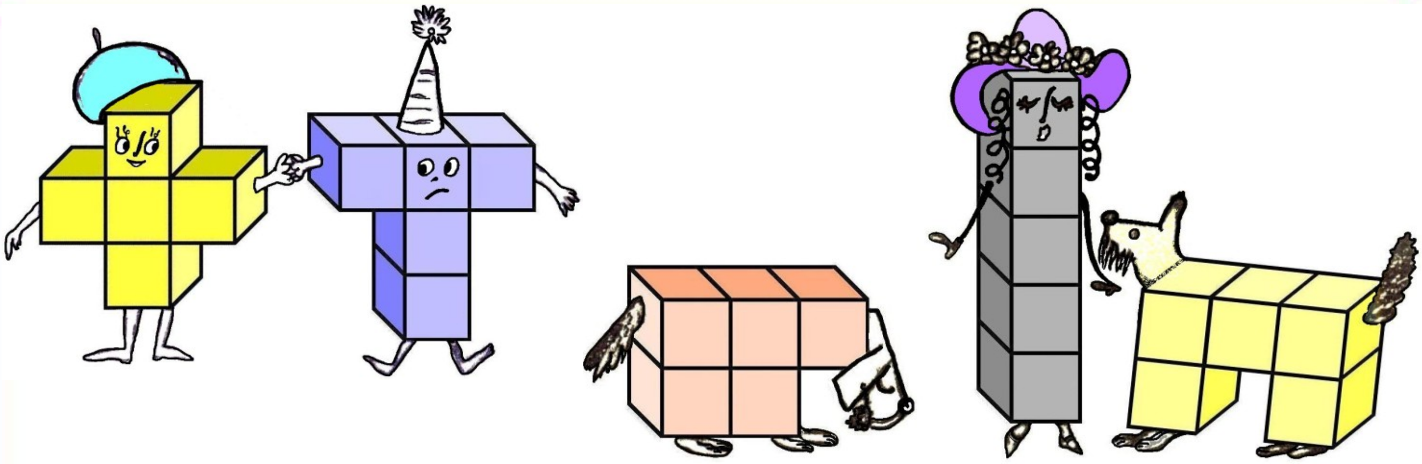




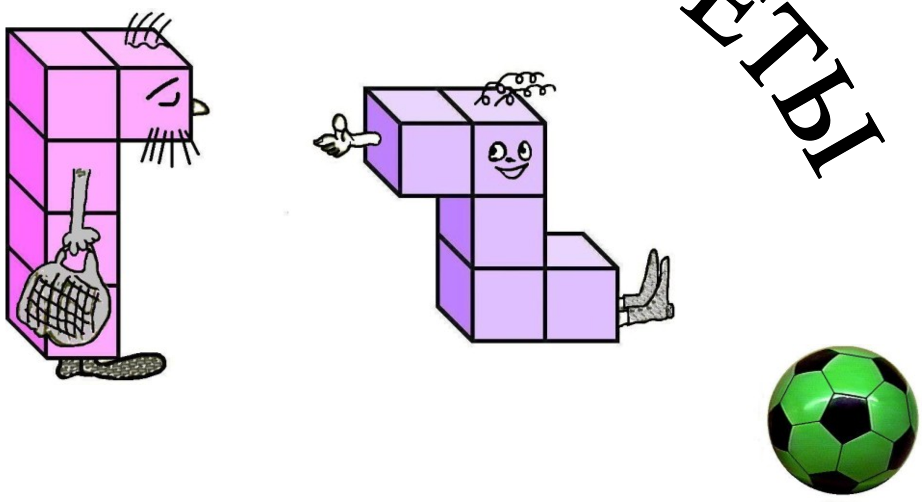


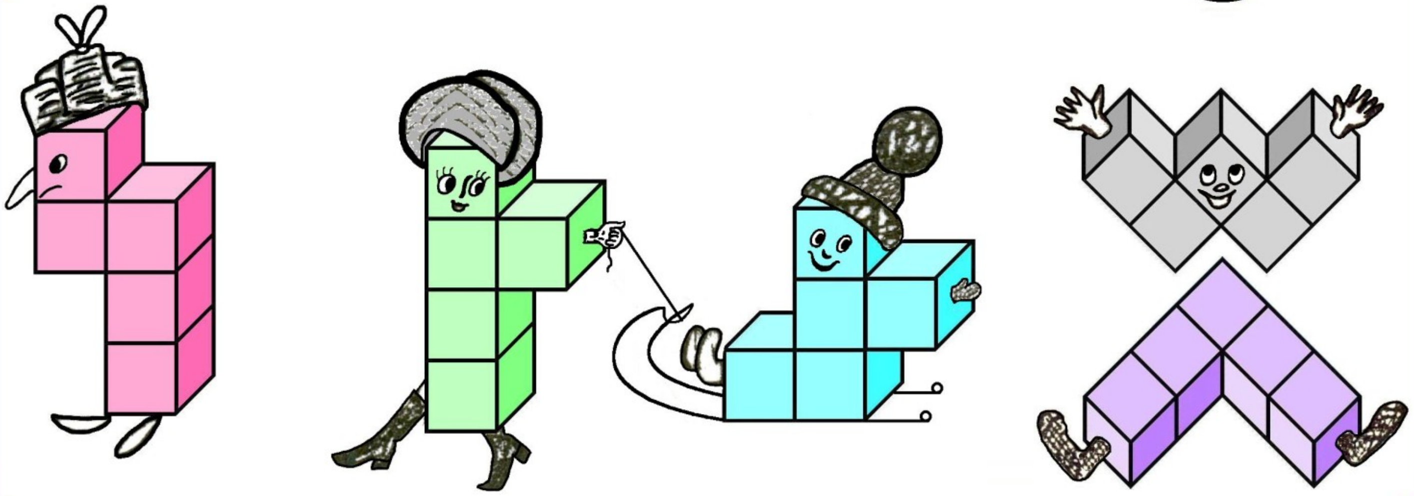
Задача 251. Задача и пример построения пирамиды без одного элемента.



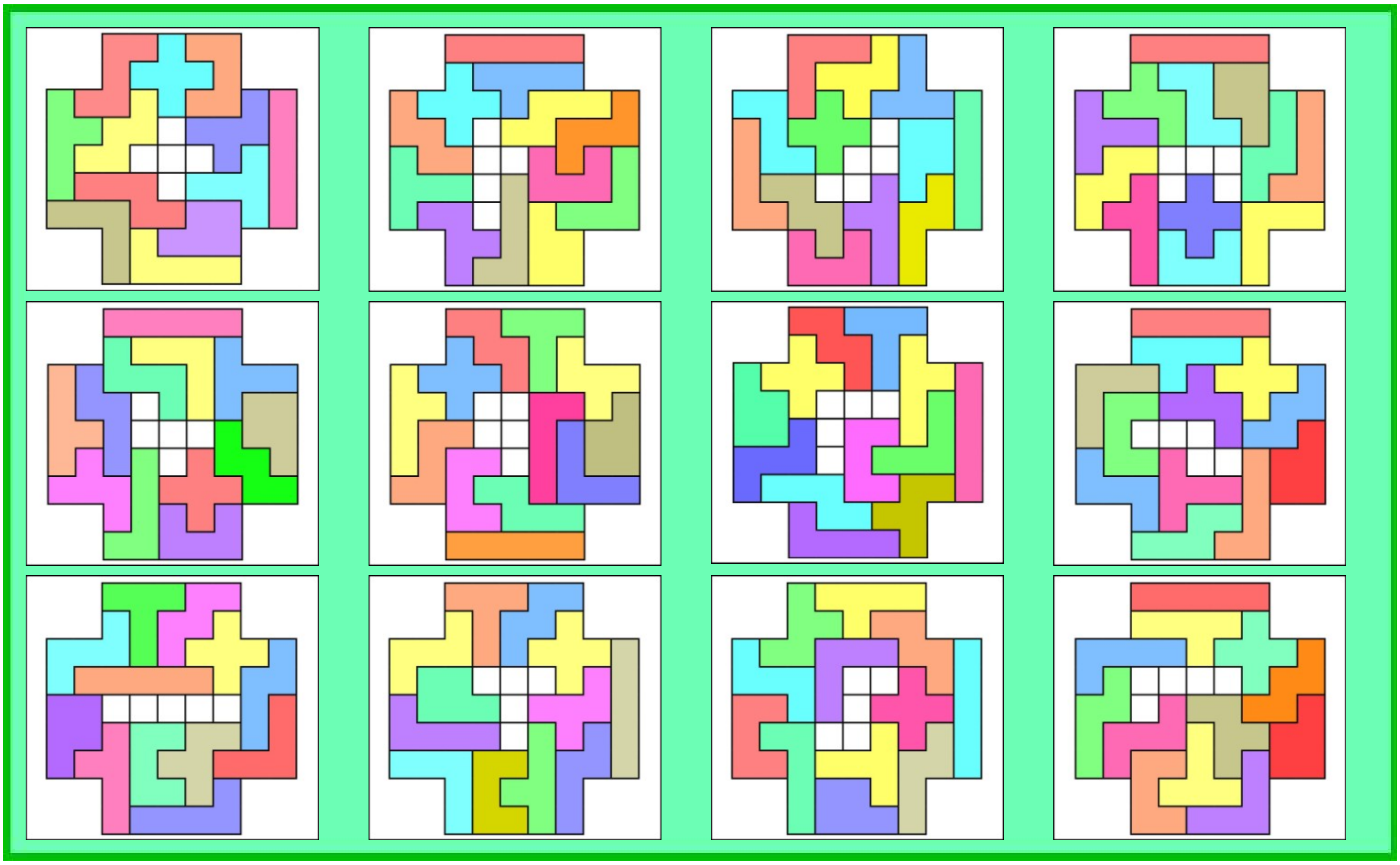


ПЕНТАМИНО - ОТВЕТЫ

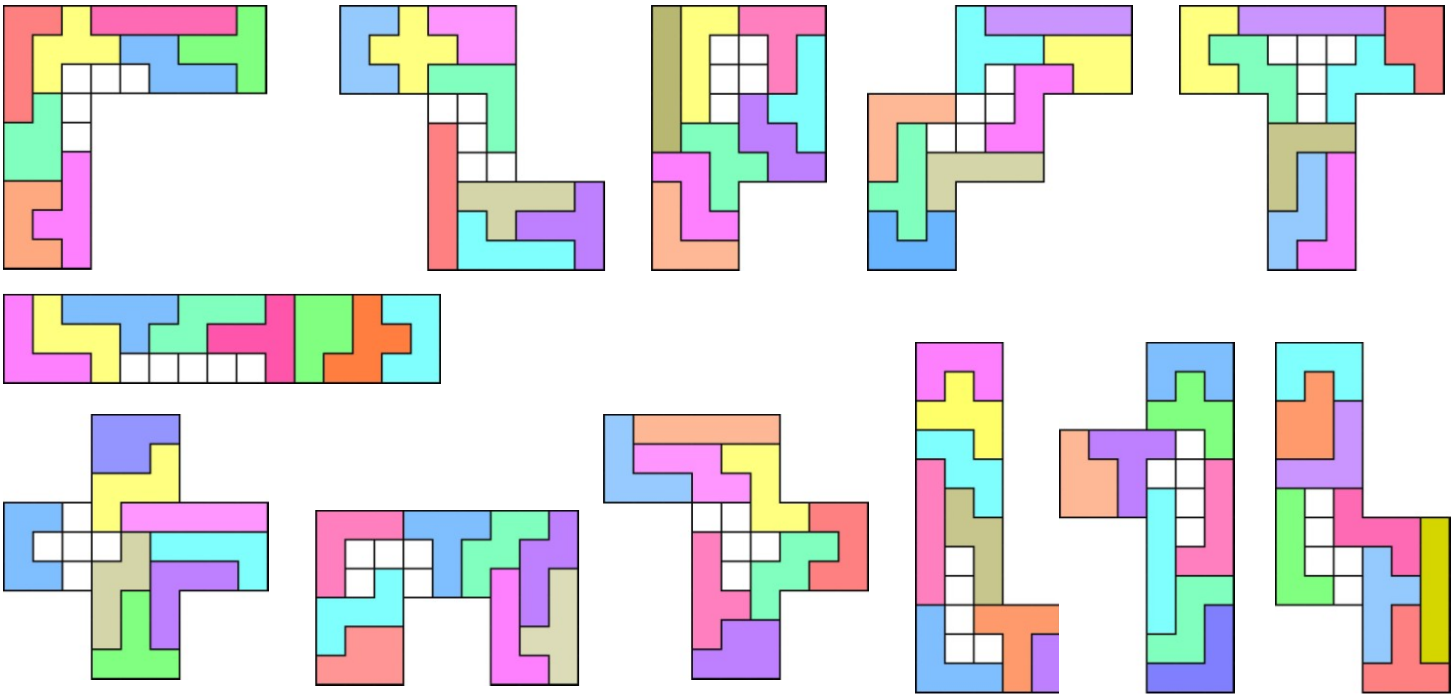




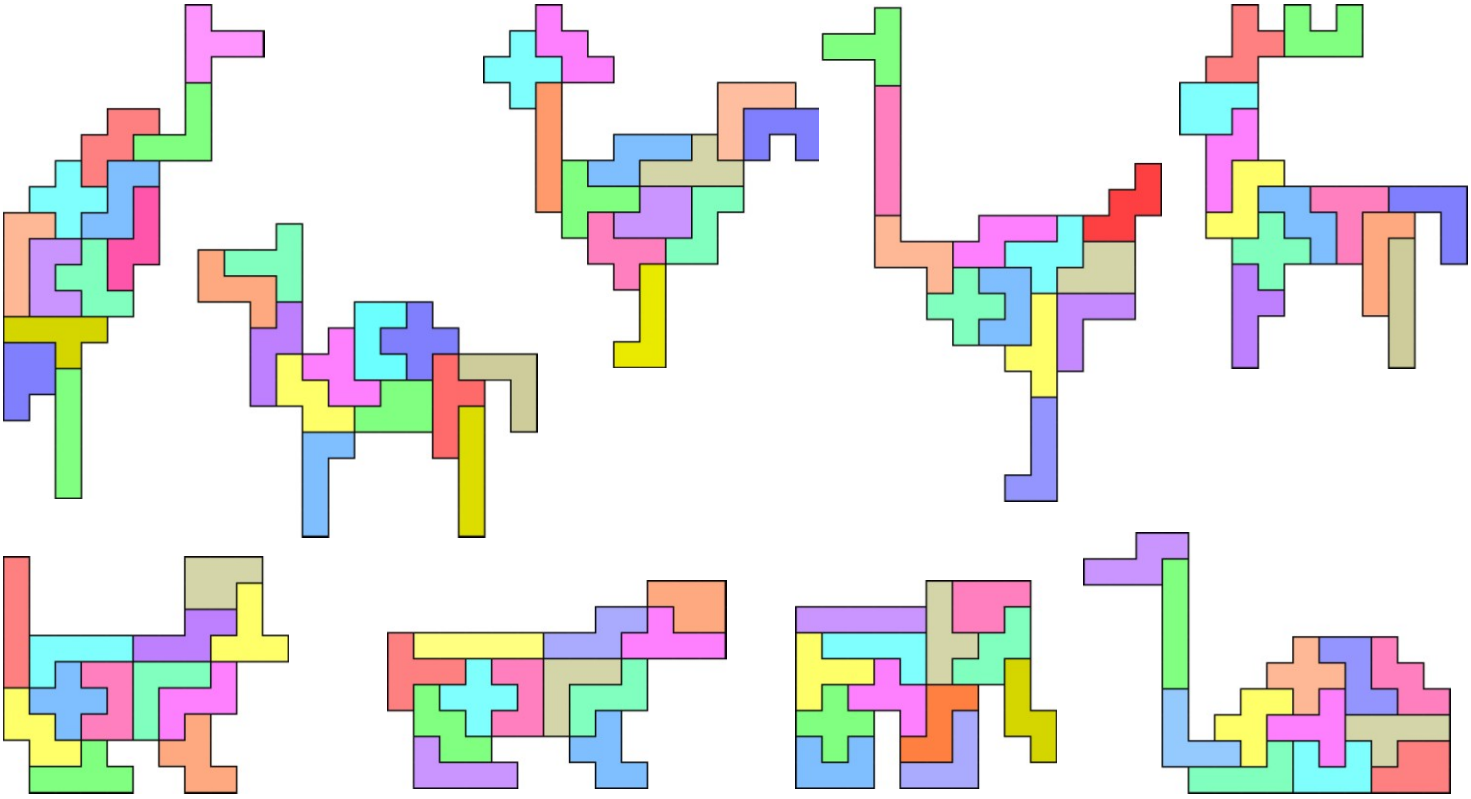
Наиболее изящные решения на задачи № **1-12** игры-головоломки «**Пентамино**» приведённые на странице 010.



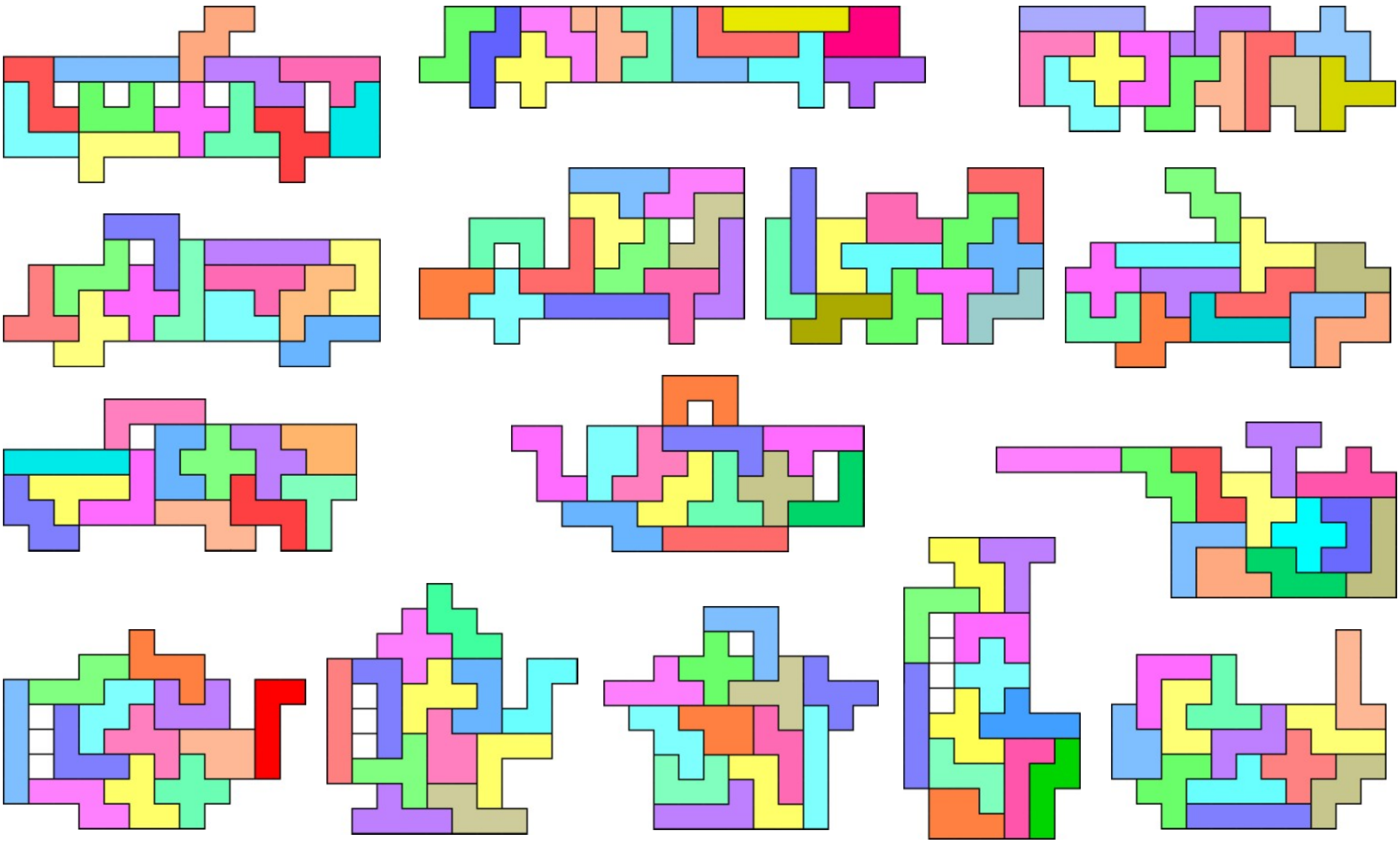
Лучшие решения задач № **13-24** игры-головоломки «**Пентамино**» приведённых на странице 011.



Ответы на тематические задачи № **25-33** приведённые на странице 012.

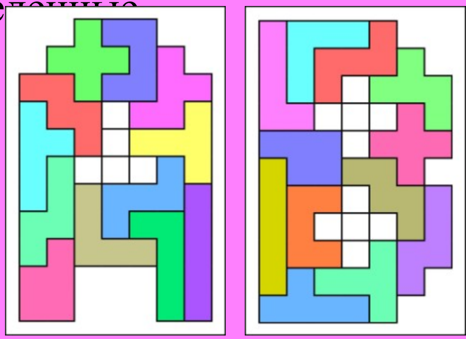


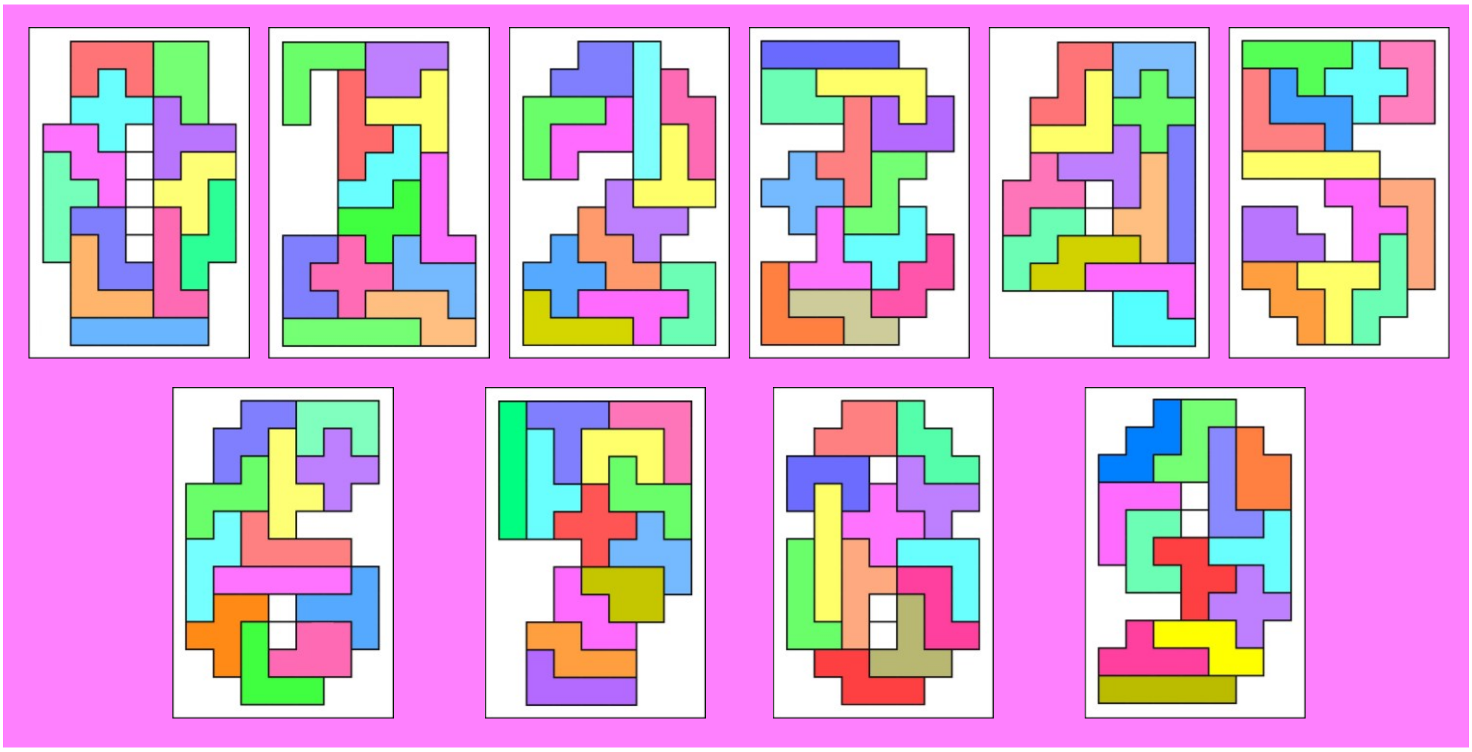
Ответы на тематические задачи № **34-48** приведённые на странице 013.



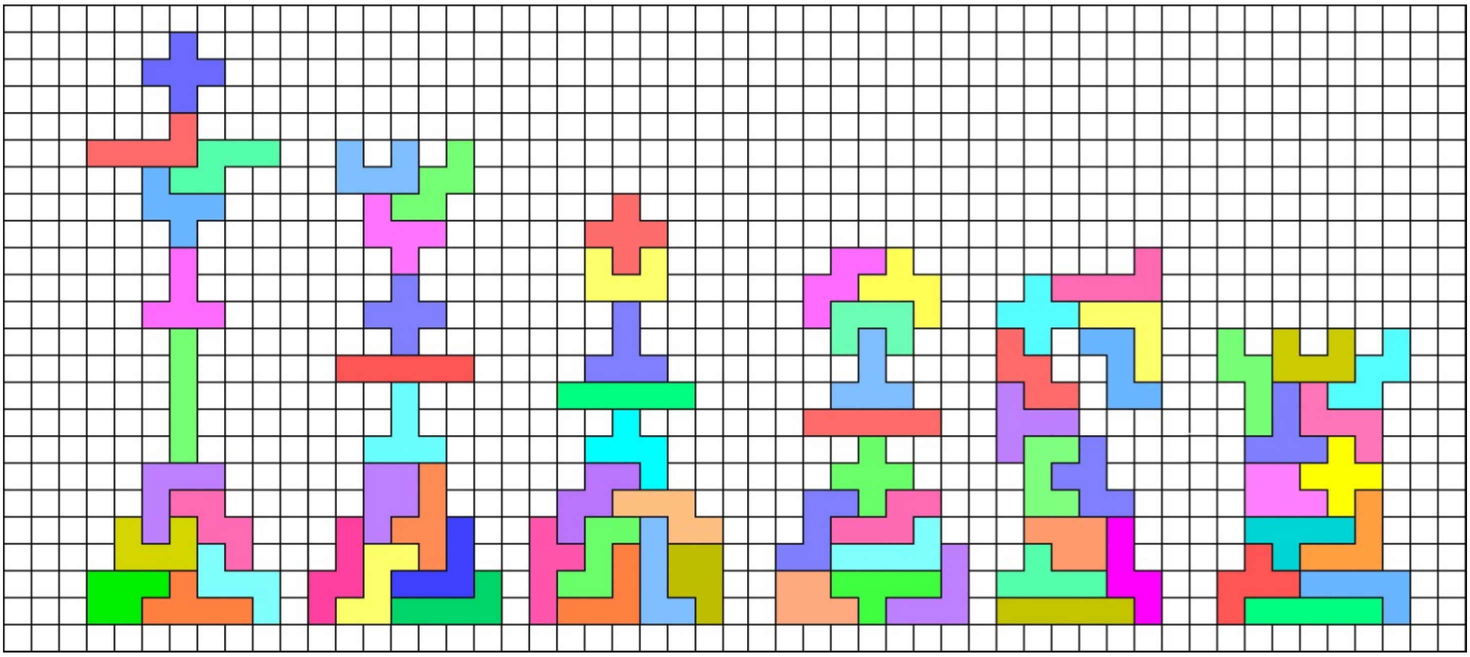
Ответы на задачи приведённые
на страницах 014-017 под № **49-84**.

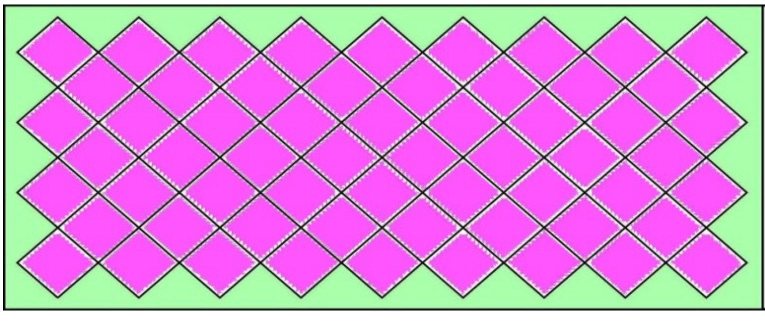
A B C D E F G H I
J K L M N O P Q R
S T U V W X Y Z





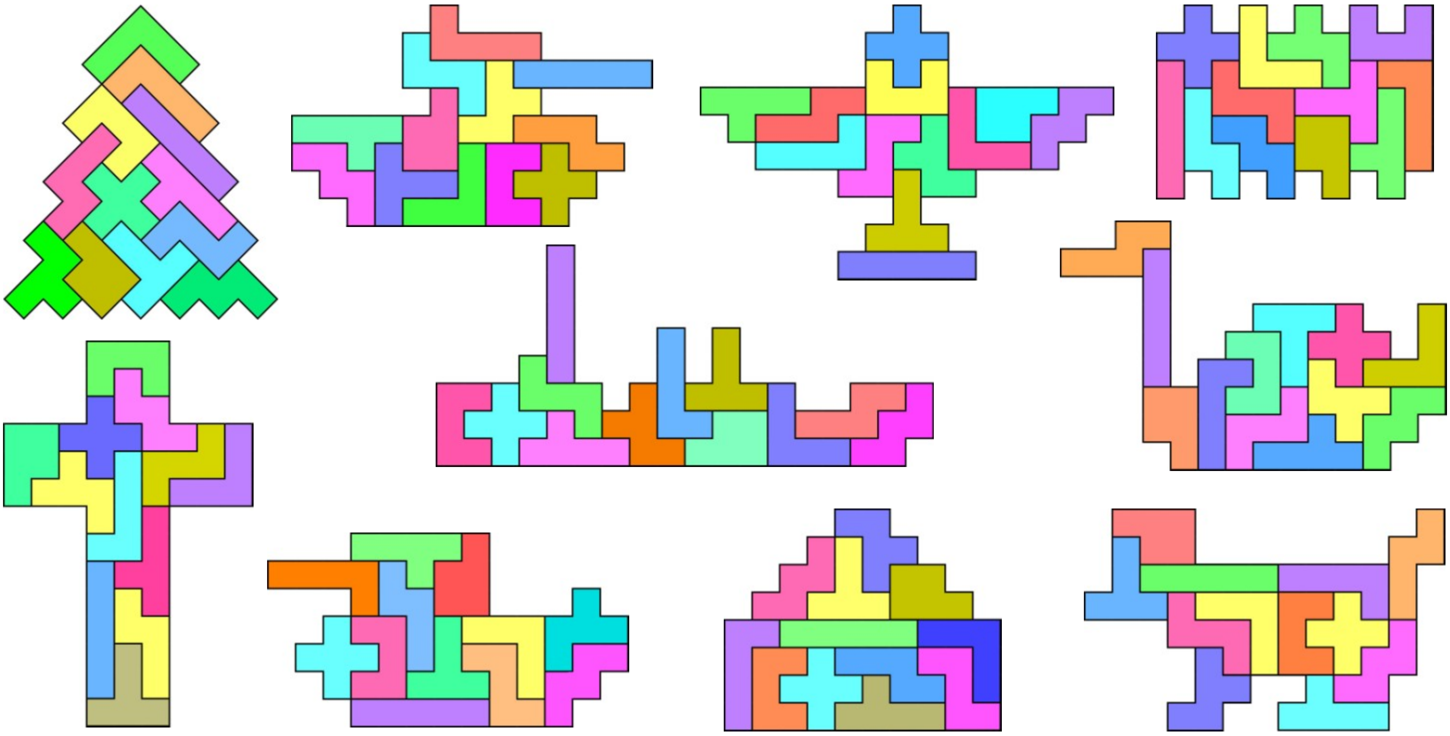
Ответы на задачи № **85-91** приведённые на странице 018.



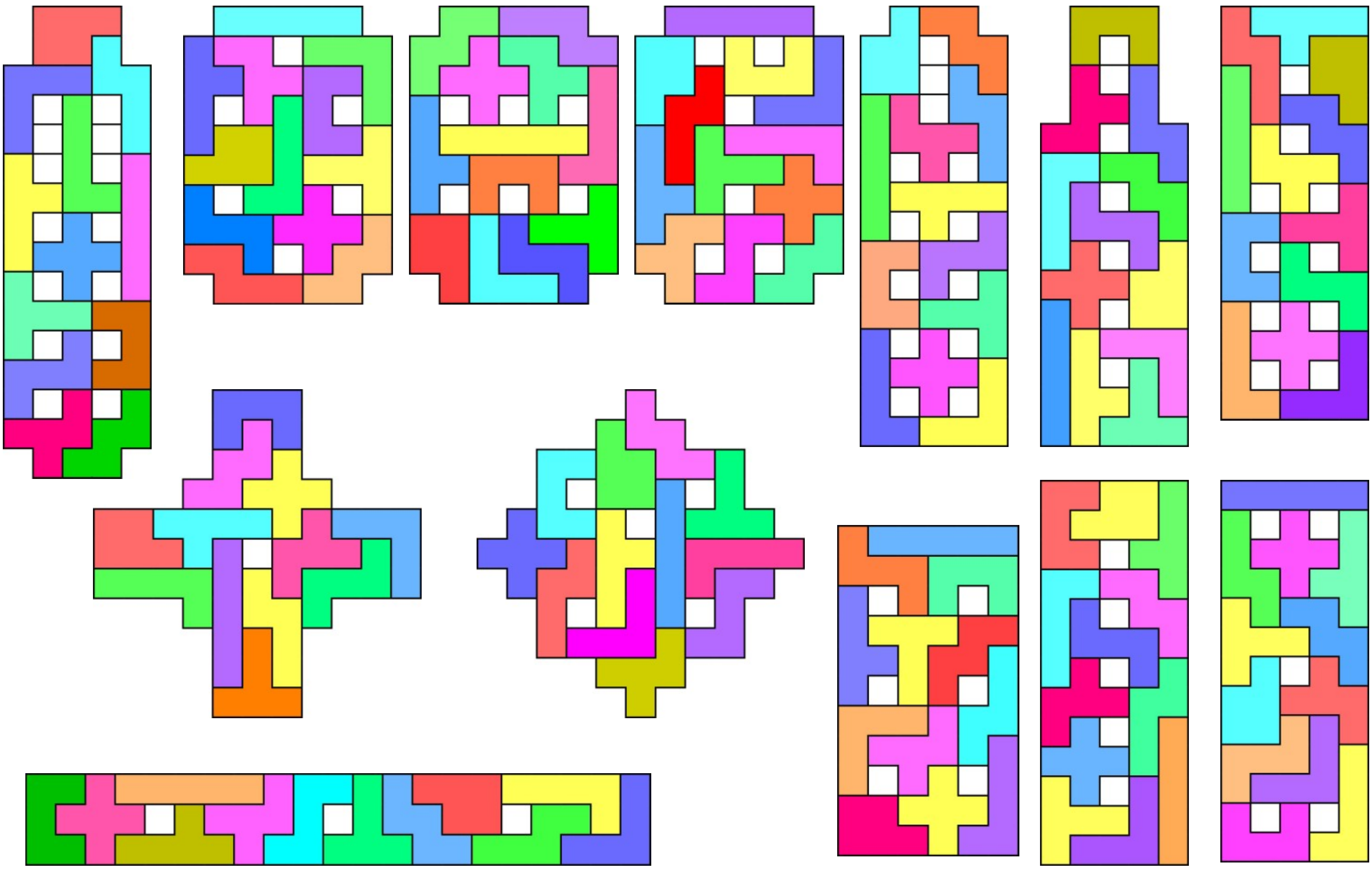


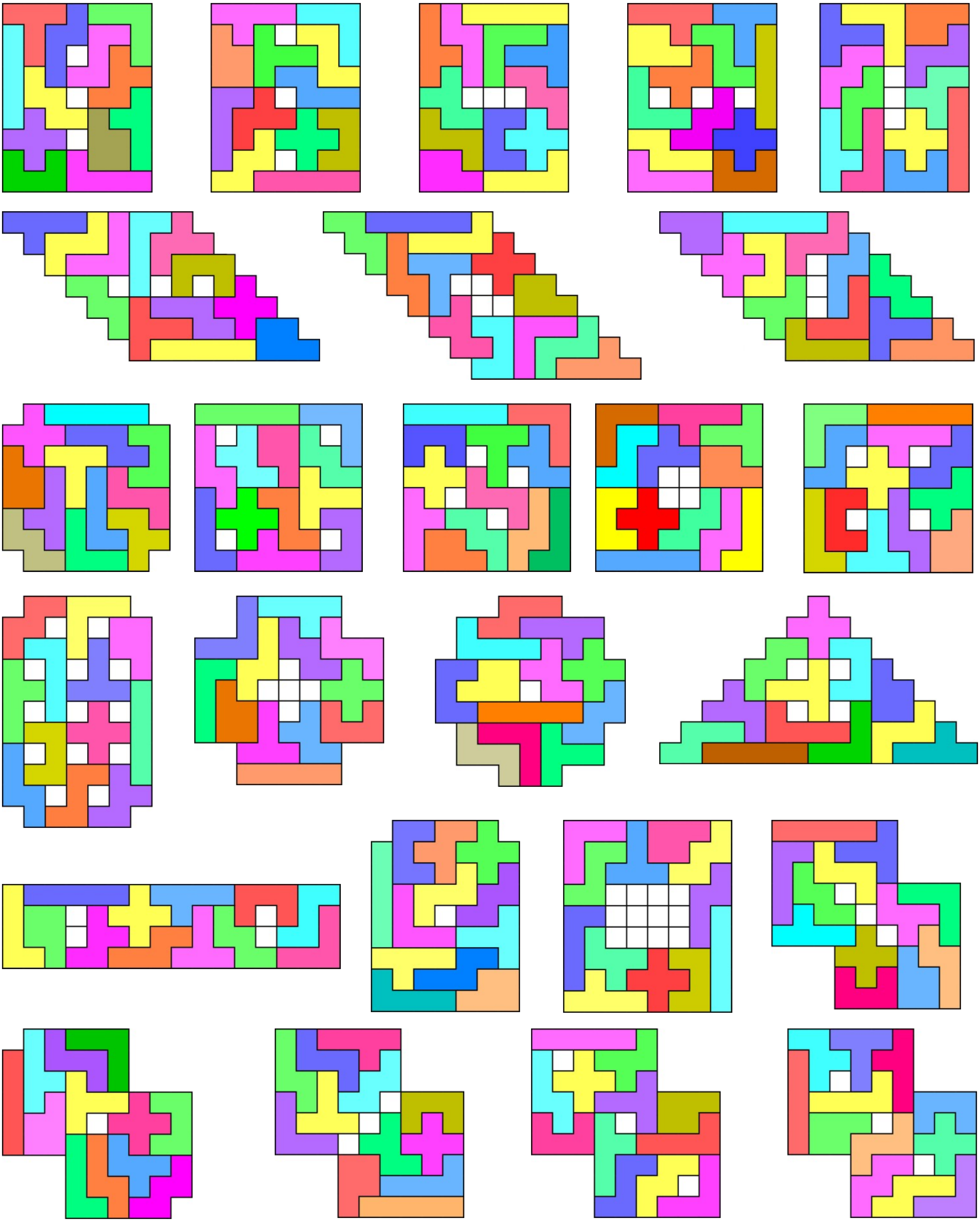
Зубчатый прямоугольник 4х9 построить возможно. Одно из доказательств приводится в книге С. Голомба "Полимино", М., Мир, 1975. Подсчитывается, какое максимальное число граничных квадратов может покрыть каждый из 12 элементов игры "Пентамино". F, W, X - по три, N, P, Y - по два, остальные по одному, всего 21 квадрат, а в приведённой фигуре их 22.

Ответы на задачи № **92-101** приведённые на странице 019.

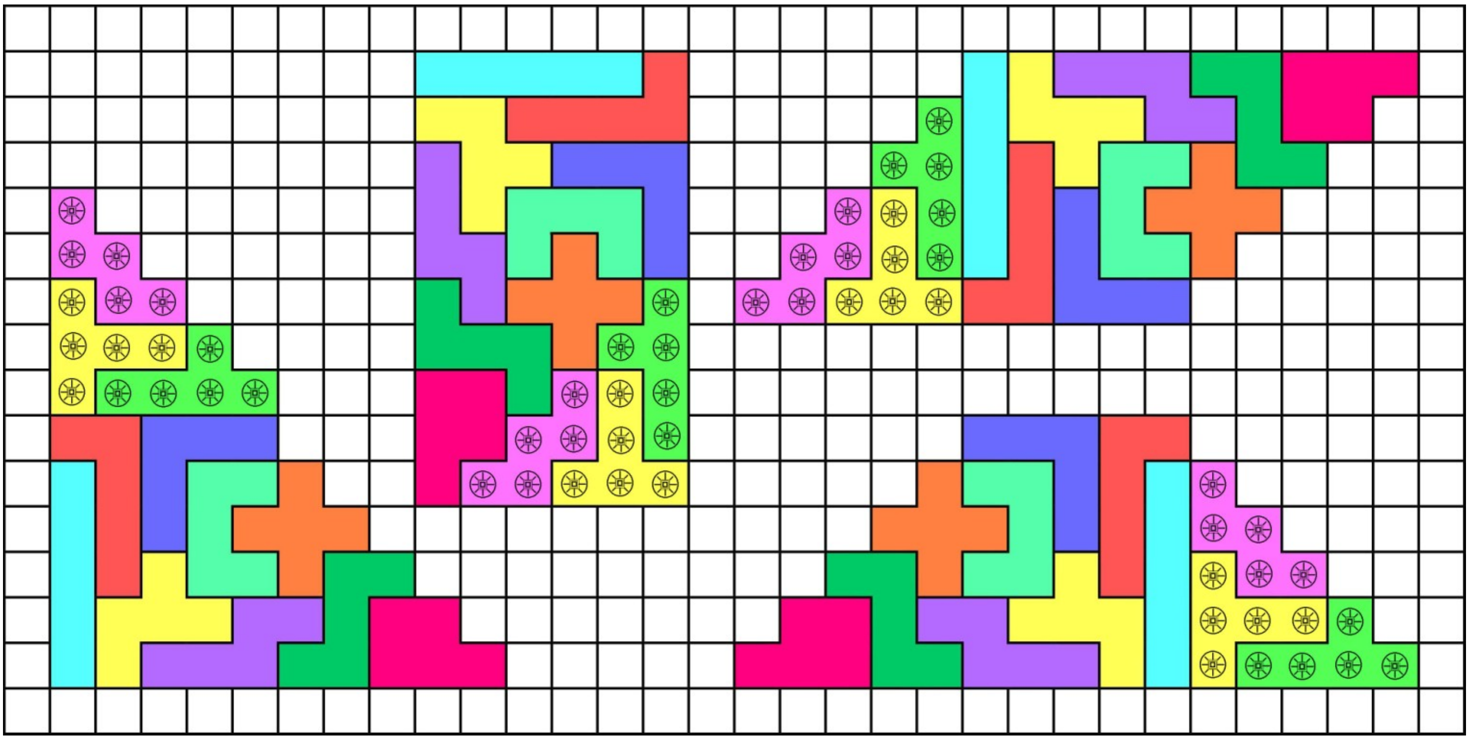


Ответы на задачи № **102-139** приведённые на страницах 020-022.

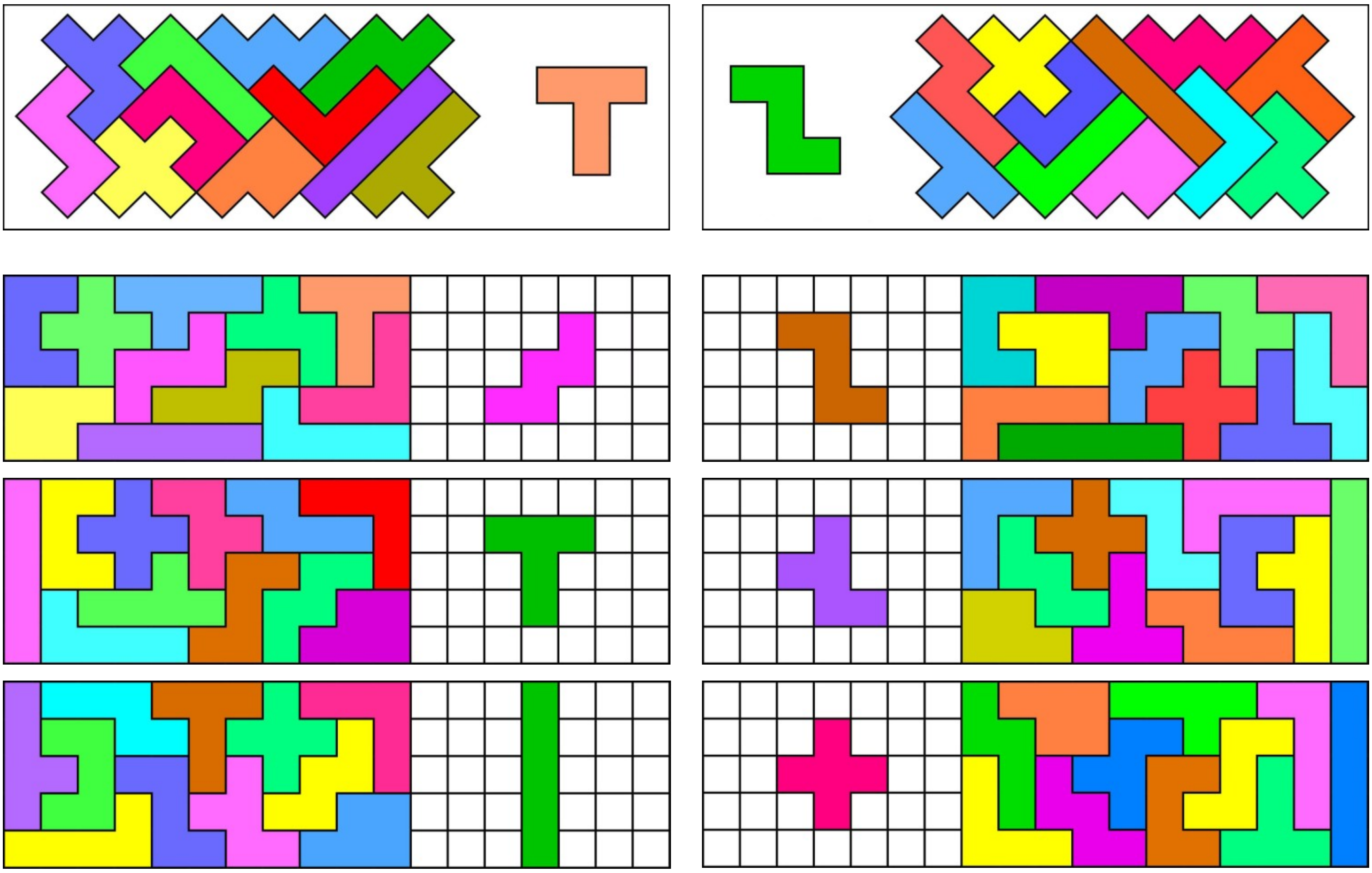




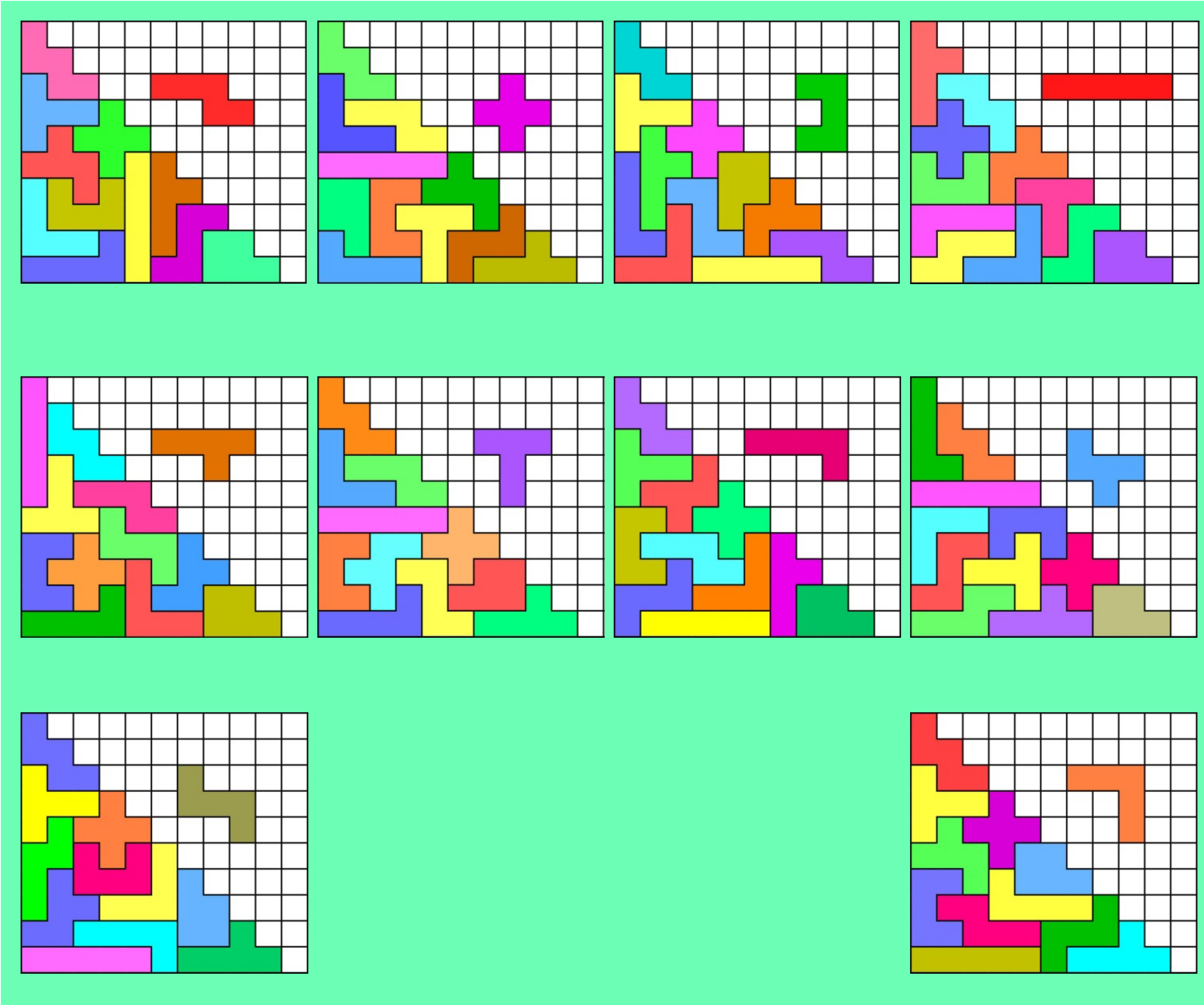
Ответы на задачи № **140-143** приведённые на странице 023.



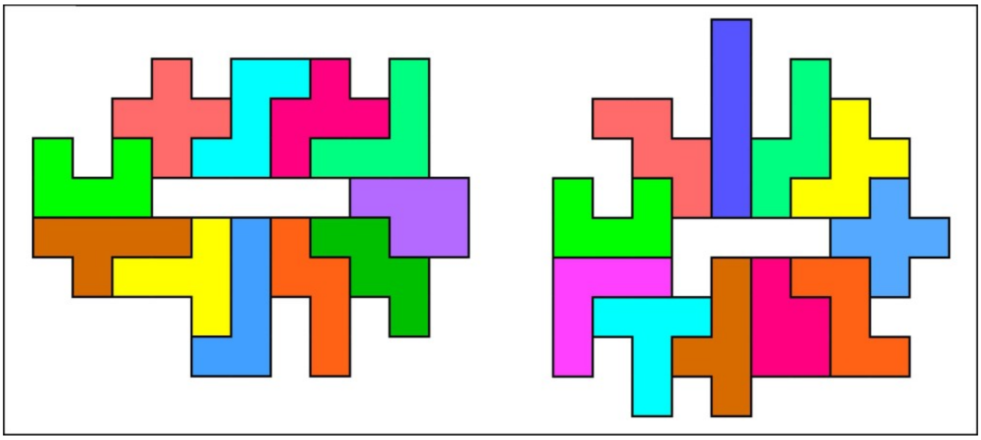
Ответы на задачи № **145-146** приведённые на странице 024.



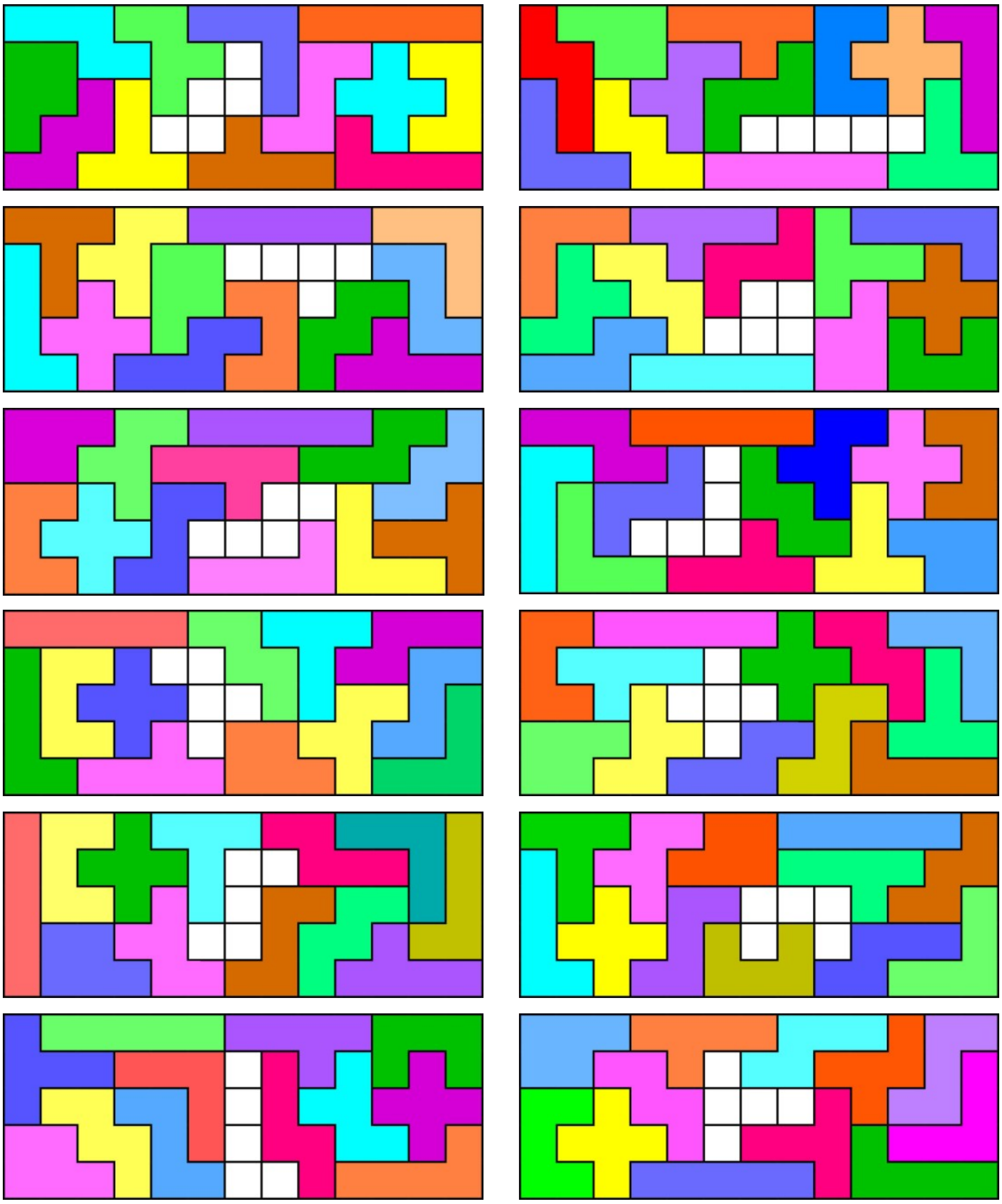
Ответы на задачи № **147-158** приведённые на странице 024.

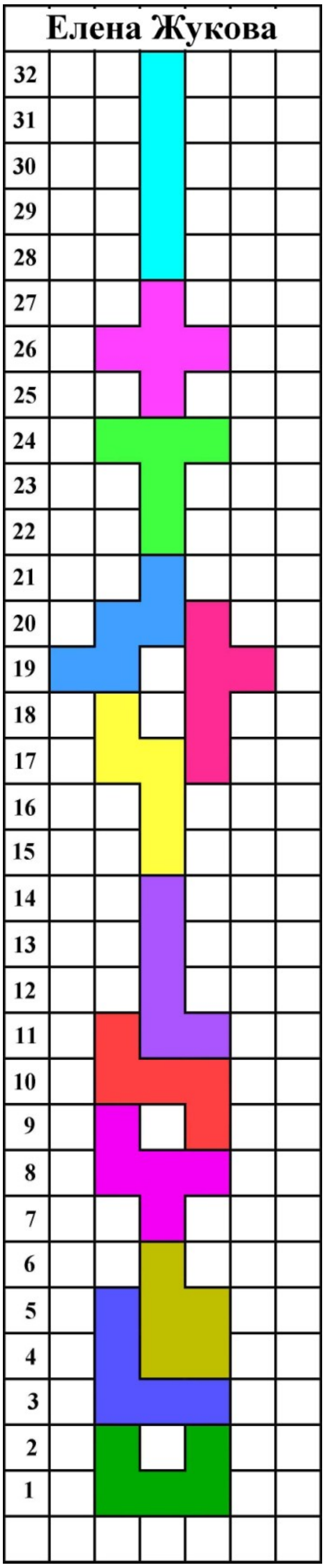


Ответы на задачу № **159** приведённую на странице 024.

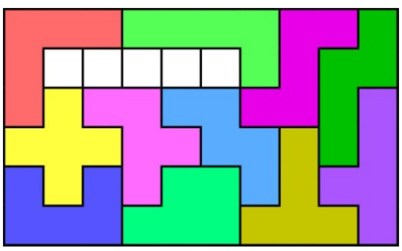


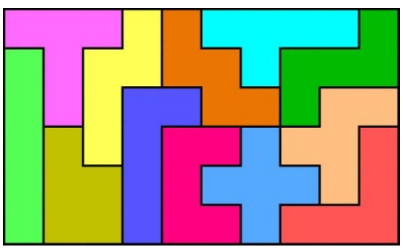
Ответы на задачи № **160-171** приведённые на странице 025.





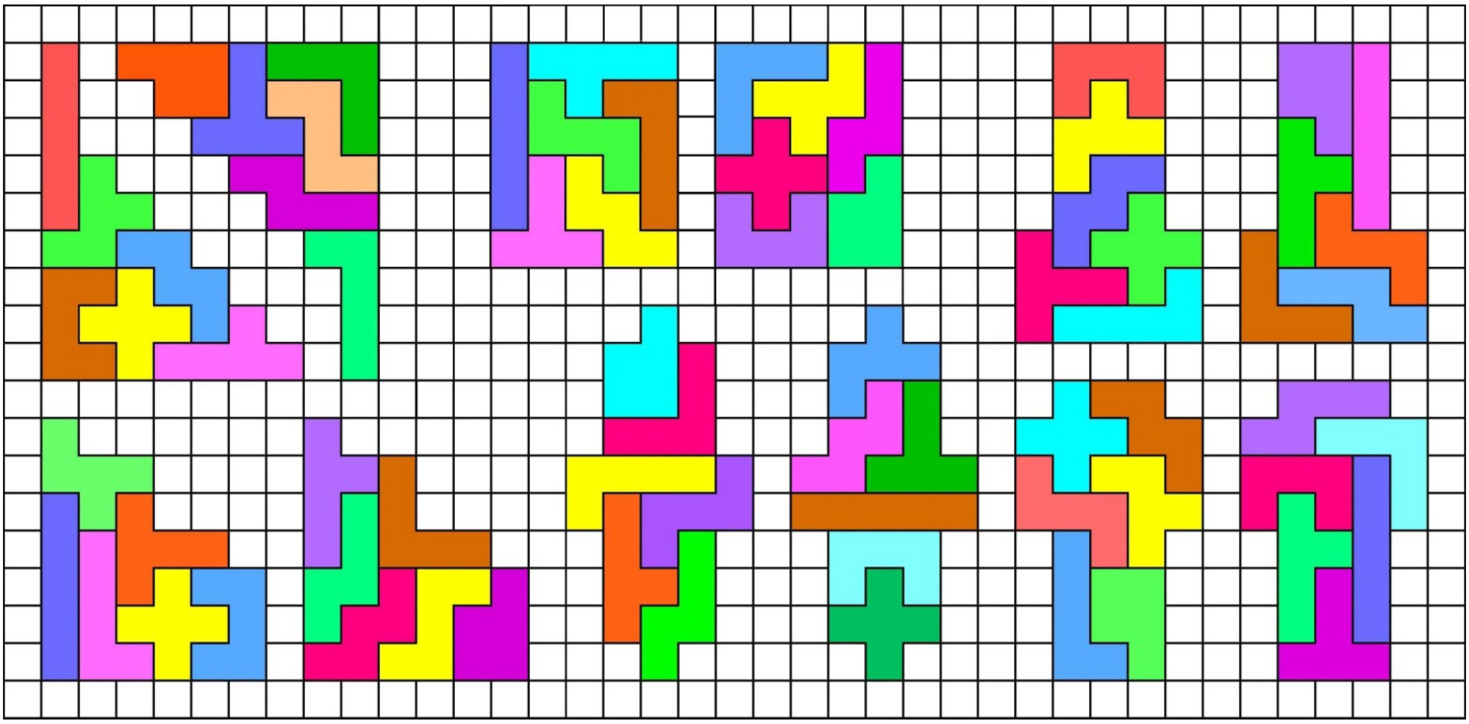
Ответы на задачи № **172а** и № **173б** приведённые на странице 025, а так же пример построения самой высокой «башни» из 12-ти элементов игры «**Пентамино**» - задача № **176с** приведённая так же на странице 025.

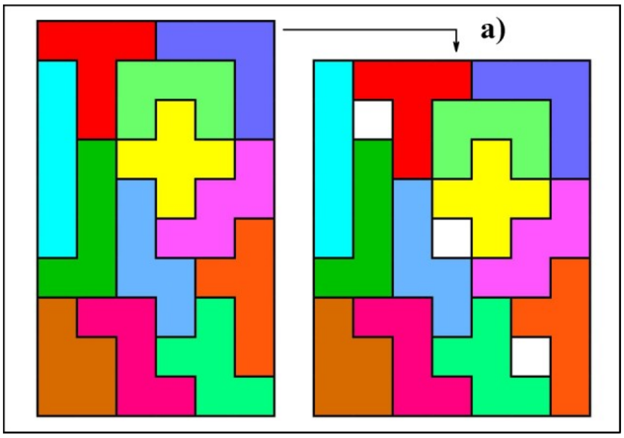
а) 

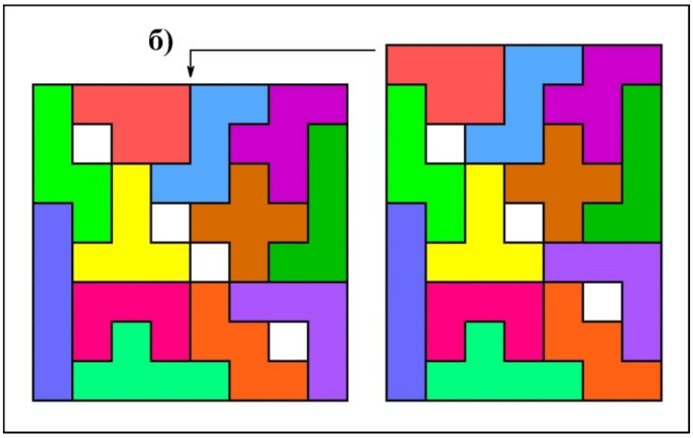
б) 

с)

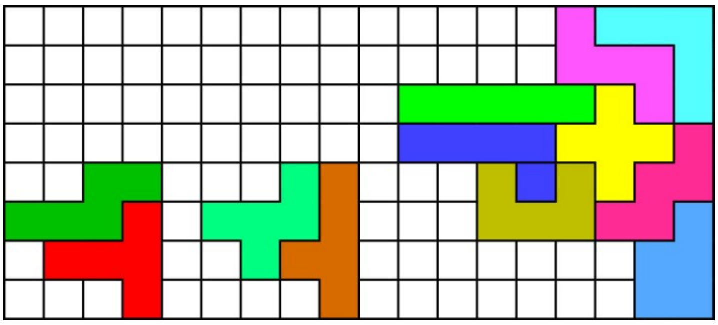
Ответы на тематические задачи **№ 177-189** приведённые на странице 026.

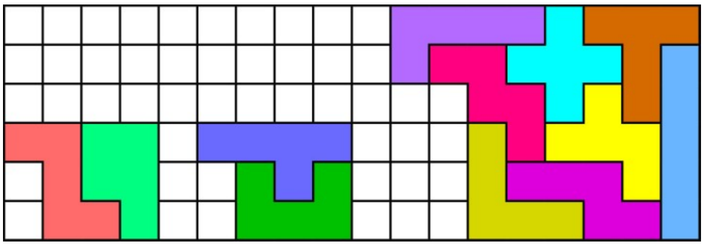


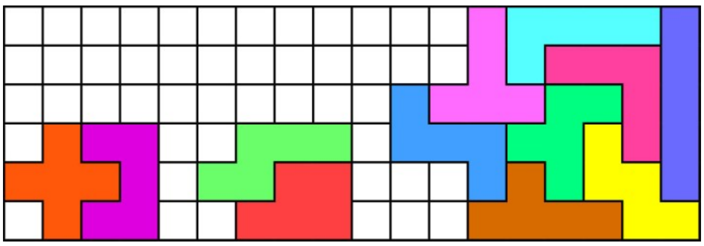




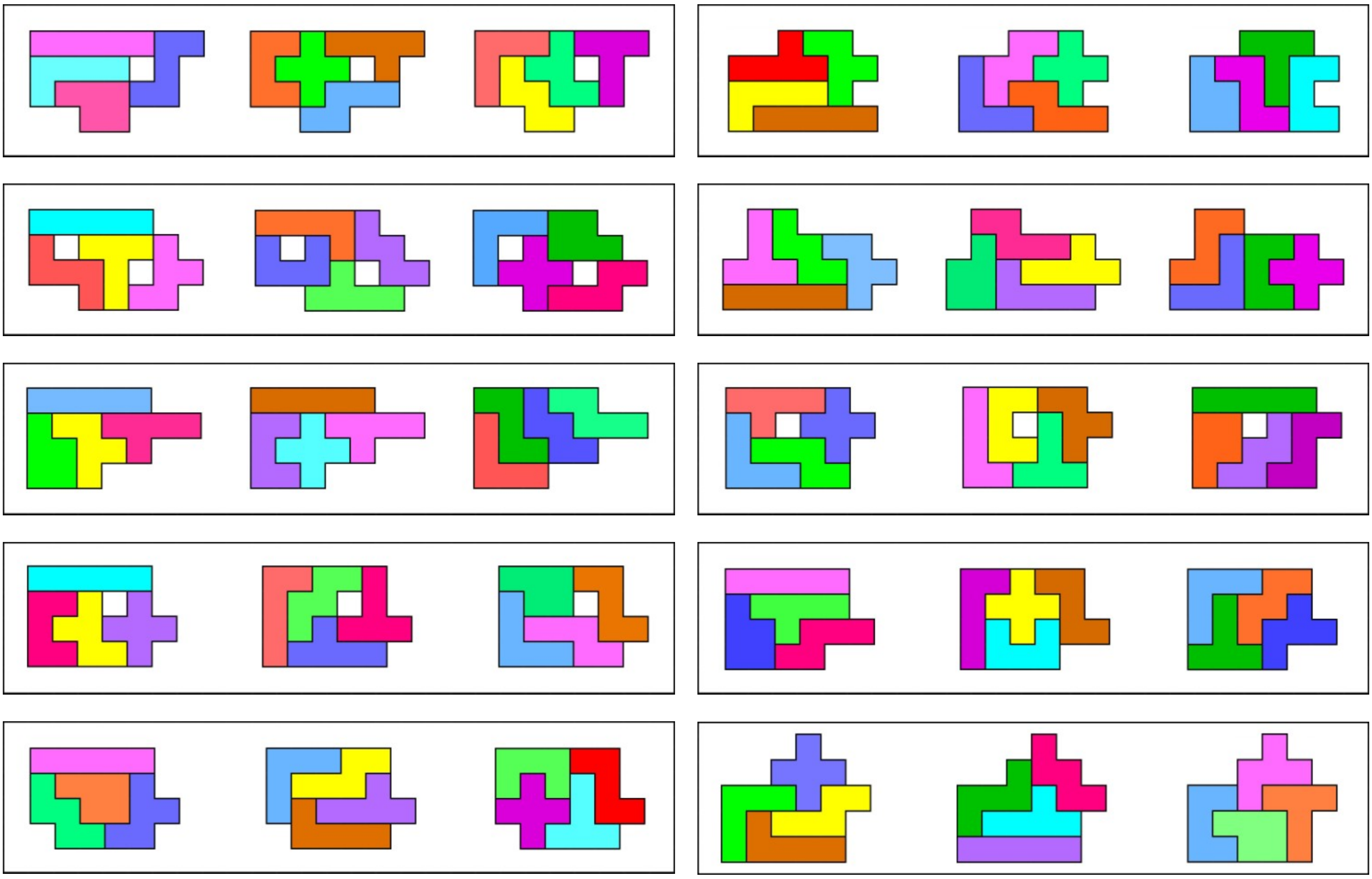
Ответы на задачи **№ 190-193** приведённые на странице 027**.**



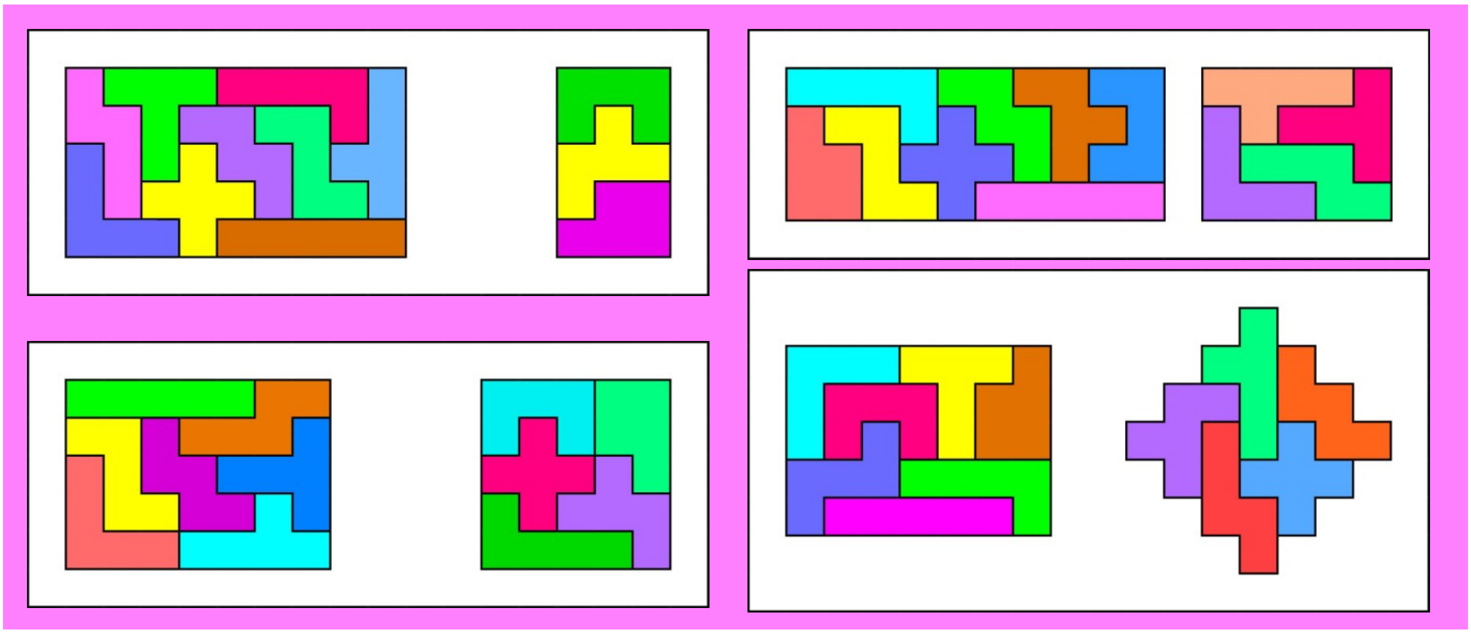




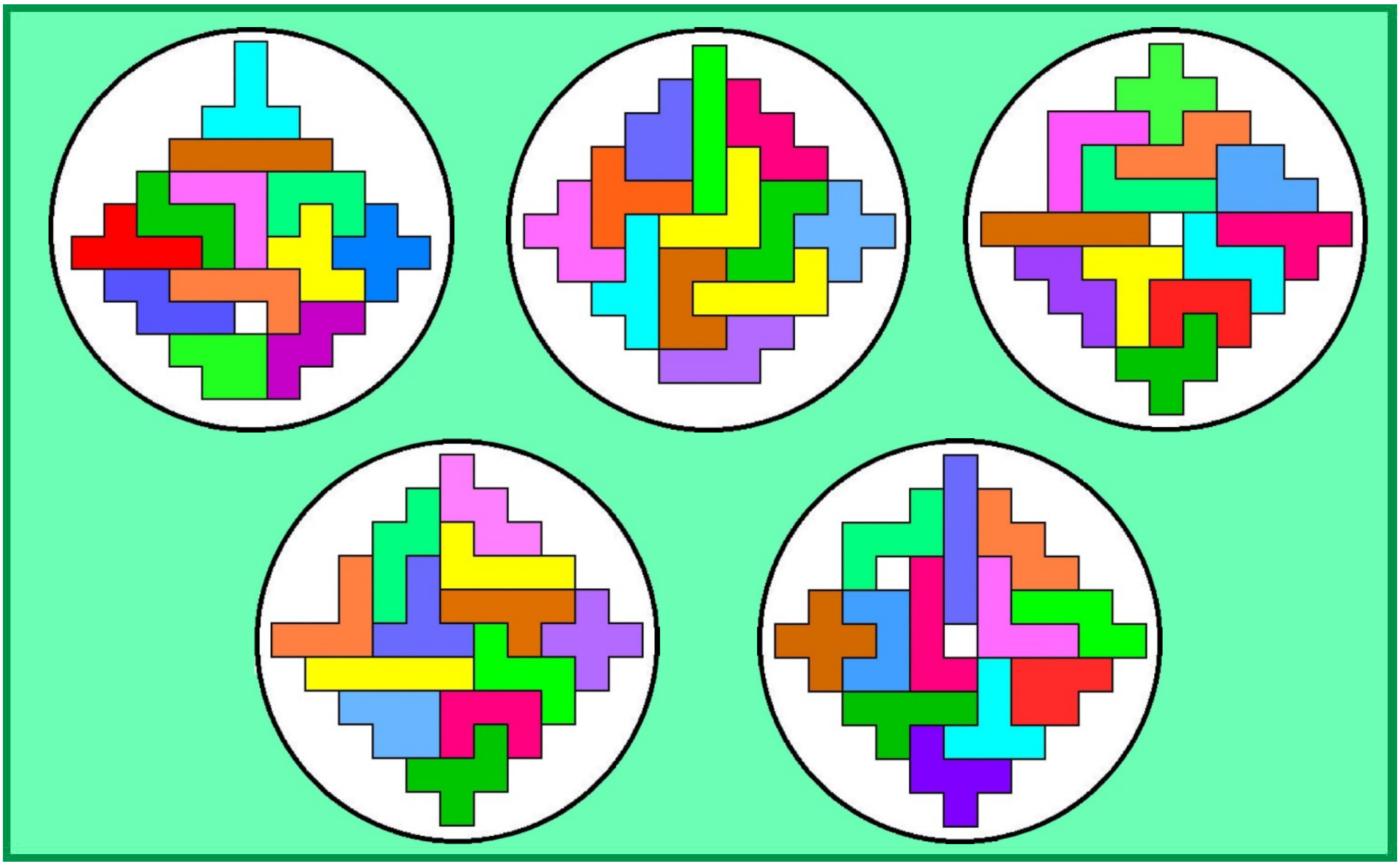
Ответы на задачи № **194-203** игры-головоломки «**Пентамино**» приведённые на страницах 028-029.



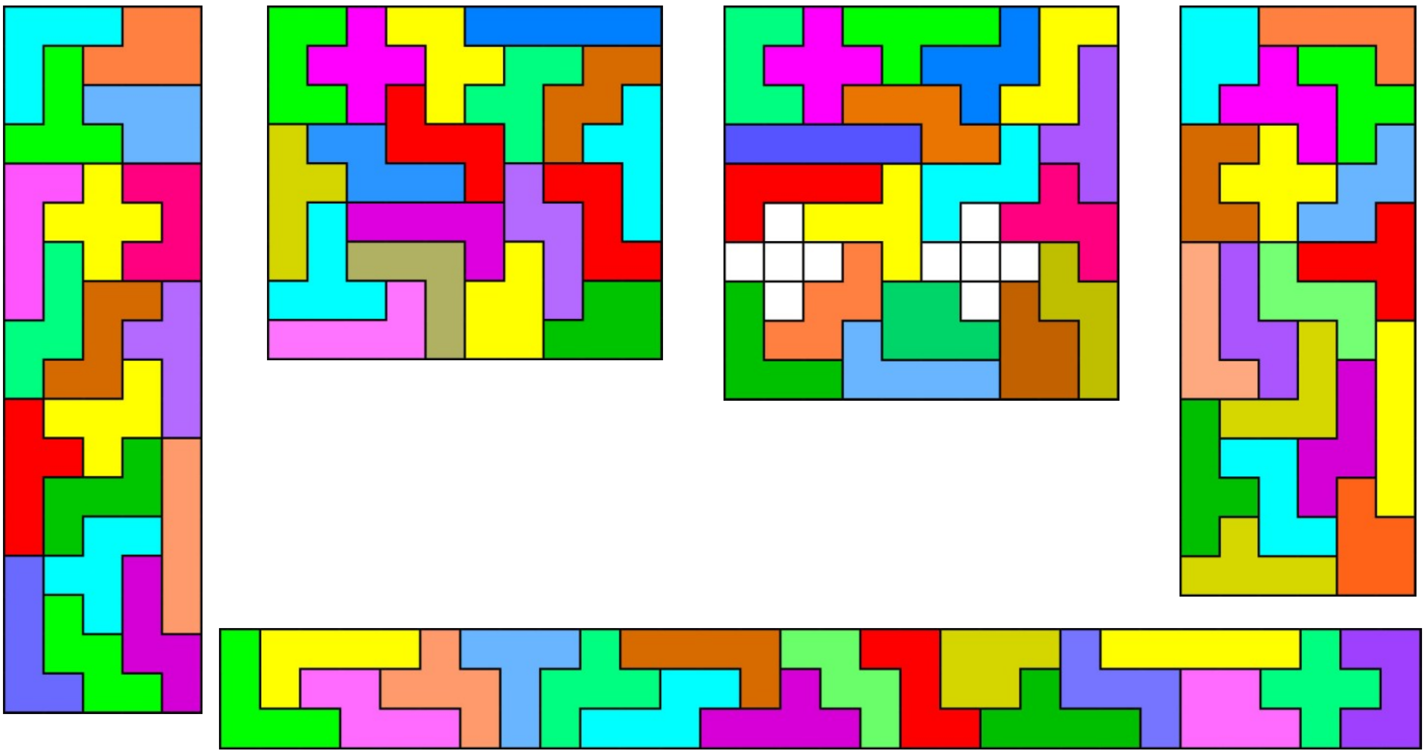
Ответы на задачи № **204-207** игры-головоломки «**Пентамино**» приведённые на странице 029.



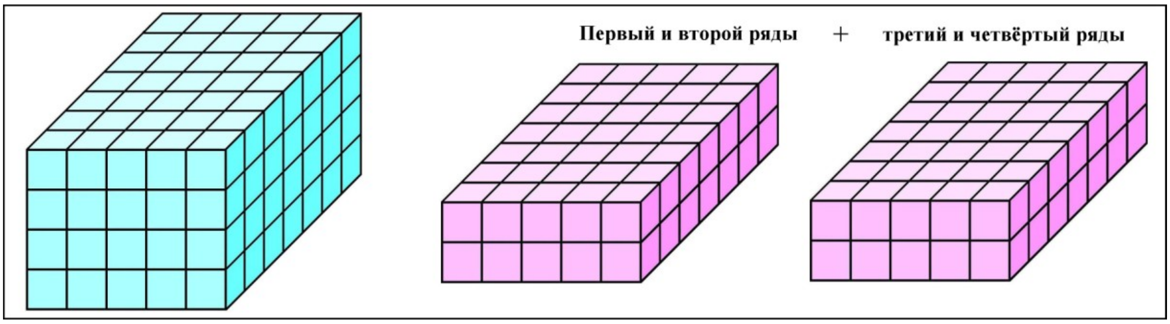
Ответы на задачи № **208-213** приведённые на странице 030.



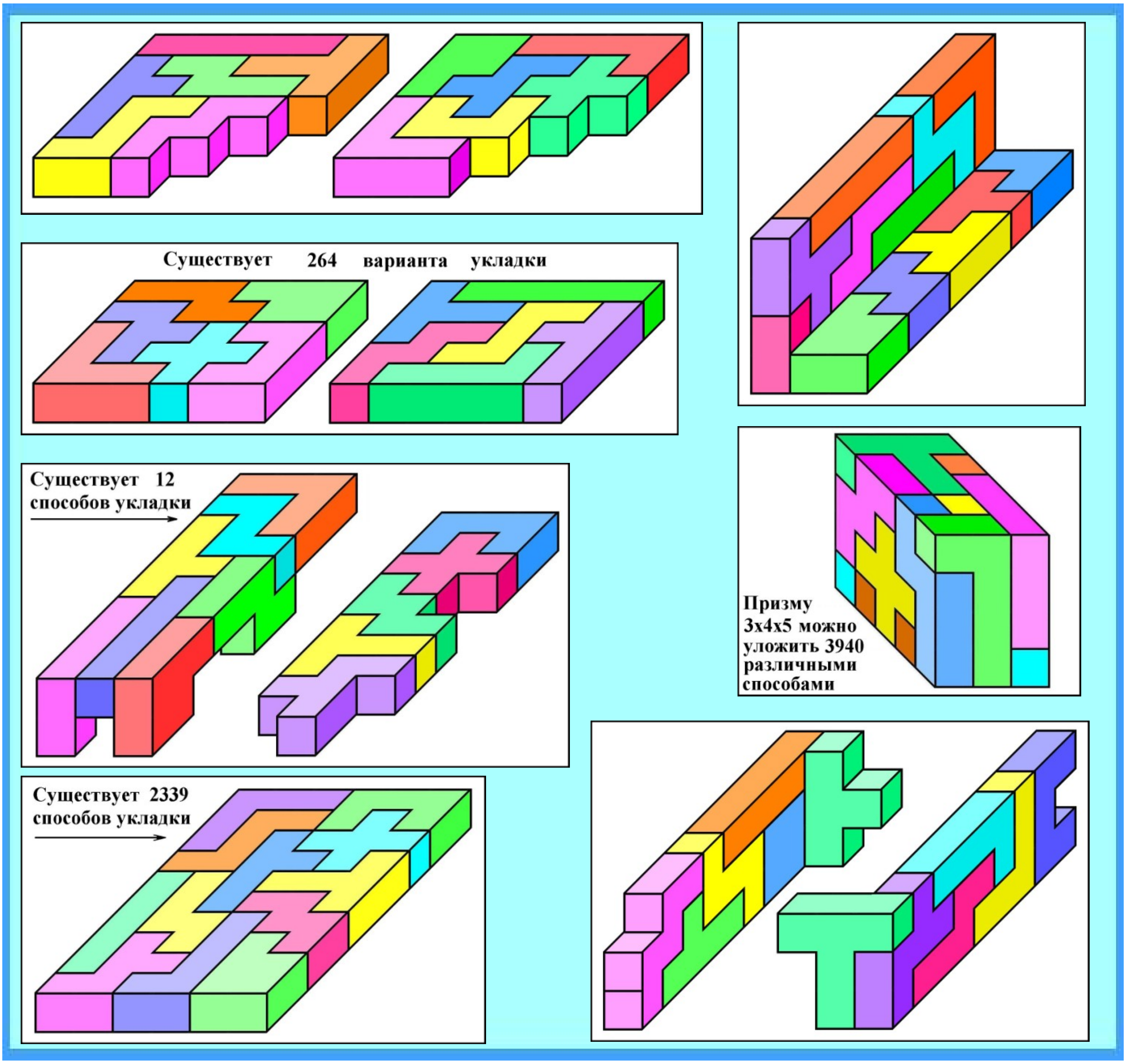
Ответы на задачи № **222-226** приведённые на странице 033.

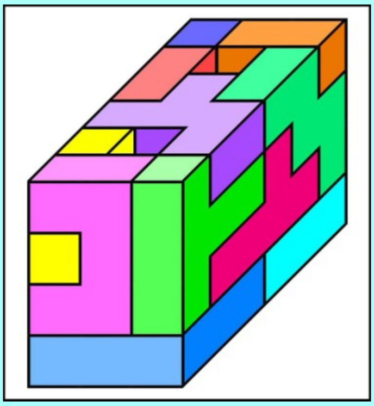
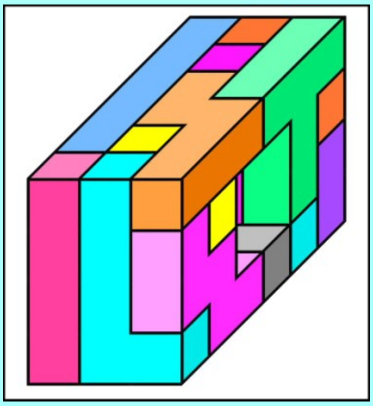
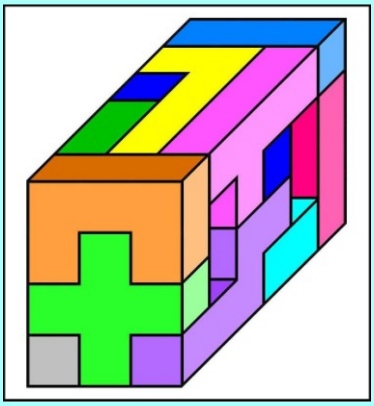
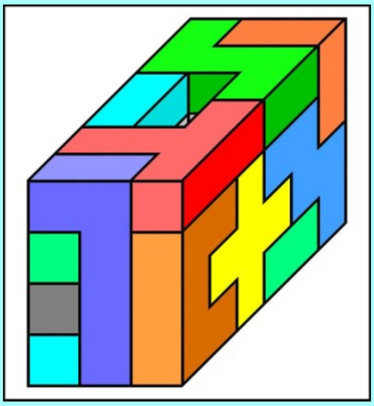
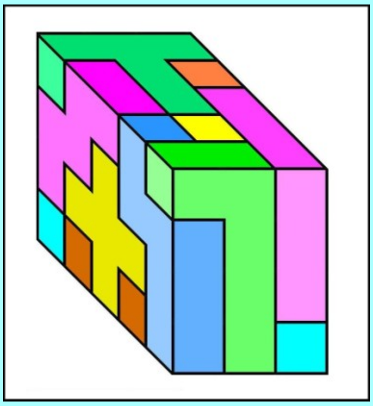
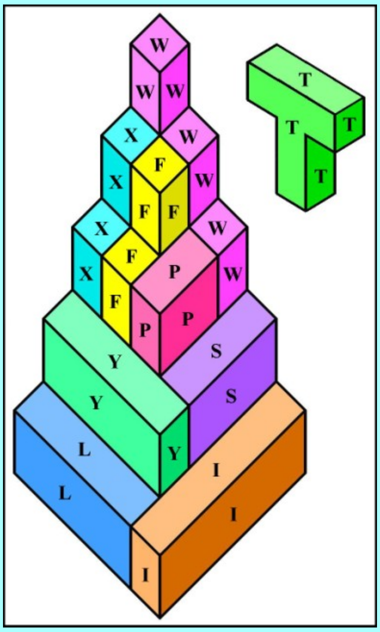
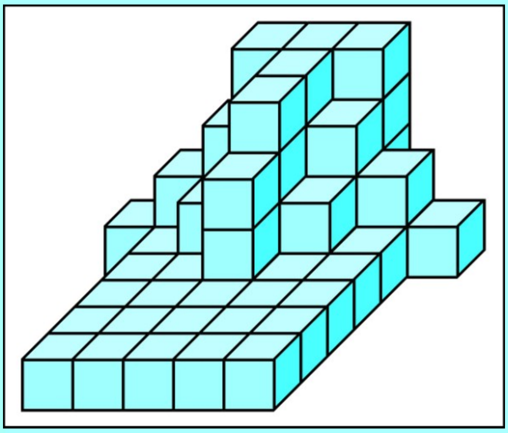
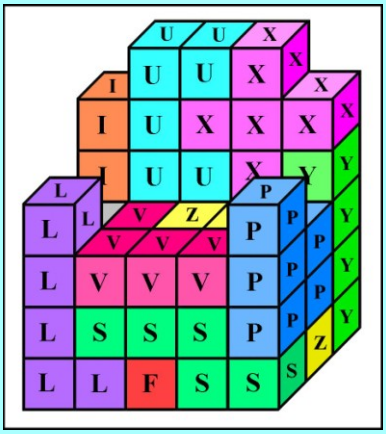


Ответы на задачи № **227-230** приведённые на странице 035.



Ответы на задачи № **231-251** приведённые на страницах 037, 038 и 039.









W
W W
X W
F
X F F W
X W
F
X P W
F P
P P
S
Y
Y S
L
L Y I
I
L
I
T
T T
T


U U X
X
I U U X X
X
I U X X X X
I U U X Y Y
L P
L V Z P P Y
L V V V P P
L V V V P P Y
L S S S P P Y
L L F S S S Z
S